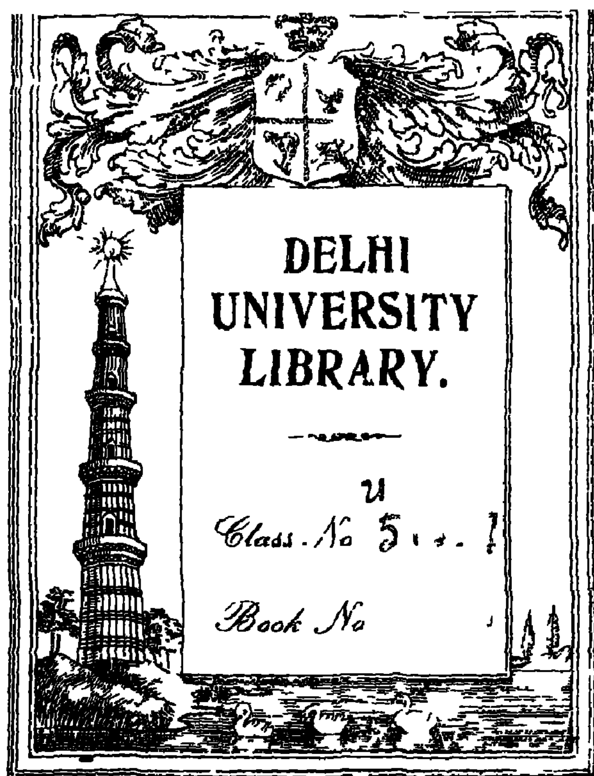
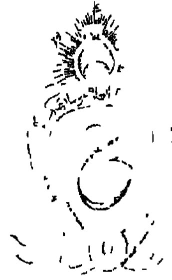

DELHI
UNIVERSITY
LIBRARY.
Class. No
Book No





سلسلۂ نصابات تعلیم جامعۂ عثمانیہ

ترسیمات

و

مساوات درجۂ دوم کا جبریہ اور ترسیمی حل
عثمانیہ میٹریکیولیشن کی جماعتوں کے لئے

مؤلفہ
قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے
پروفیسر ریاضیات عثمانیہ یونیورسٹی کالج حیدر آباد دکن

سنہ ۱۳۳۹ھ سنہ ۱۳۳۰ف سنہ ۱۹۲۱ع

مطبوعۂ دار الطبع سرکار عالی حیدر آباد دکن

۷۸۶

دیباچہ

حسب ہدایات ذیلی کمیٹی ریاضیات یہ چھوٹی سی کتاب "ترسیمات اور مساوات درجہ دوم کے نظری اور ترسیمی حل پر" عثمانیہ مٹریکیولیشن کی جماعتوں کے لئے منظورہ نصاب کے مطابق لکھی گئی ہے۔ نصاب مذکور کی حدود کے اندر جسقدر ممکن تھا کتاب کو ترتیب اور مضمون کے لحاظ سے مکمل بنانے کی کوشش کی گئی ہے اور اس امر کو ہمیشہ ملحوظ رکھا گیا ہے کہ مطالب کو صاف، سادہ اور آسان عبارت میں پیش کیا جائے۔

ہر موقع پر مضمون کی توضیح کے لئے حل کردہ اور مشقی مثالوں کی کافی تعداد موجود ہے، تاہم طالب علم کو چاہئے کہ ہر قسم کے اعداد و شمار کو جن میں وہ خاص دلچسپی رکھتا ہو ترسیمی طریق پر تعبیر کرنے کی کوشش کرے اور اس طرح مناسب طبع زاد مثالوں کا ذخیرہ اپنے لئے خود پیدا کرلے۔ مثلاً کرکٹ یا دوسری کھیلوں میں اپنی دوڑوں اور بازیوں کے گراف بنانے سے، اپنے امتحانوں کے حاصل کردہ نشانات کو مرتسم کرنے سے، معمل میں اپنے تجربات کے مقدمات کی بناء پر ترسیمیں بنانے اور تپش پیما اور بارپیما کے چڑھنے اترنے کو مرتسم کرنے سے کئی دلچسپ مثالیں مرتب ہو سکتی ہیں۔ روزانہ اردو اور انگریزی اخباروں میں کئی ایسے اعداد و شمار ملتے ہیں جن کی بناء پر ترسیمیں بنانا دلچسپی سے خالی نہیں ہوتا۔ اس کے علاوہ بہت سی کتابیں ہیں مثلاً وٹیکرز المانک، سٹیٹس مین ییربک، بستان آصفیہ وغیرہ وغیرہ جن میں ایسے اعداد و شمار کا ذخیرہ موجود ہے جو ترسیمی طریقوں

کے لئے نہایت موزوں ہیں۔
میں اس امر کو پوشیدہ نہیں رکھنا چاہتا کہ اس کتاب کی تیاری میں مجھے بیحد محنت اور تکلیف اٹھانی پڑی، لیتھوگراف کے ذریعہ تصاویر اور خاص طور پر گراف کاغذ کے خانے، نقطے، خط اور منحنی صحیح طور پر مرتسم کرنا محض ناممکن ہے، سنٹی میٹر کاغذ کا استعمال تو خارج از بحث تھا میں نے سوالات کے حل کرنے میں انچوں والے کاغذ کو استعمال کرنے کی کوشش کی ہے وہ بھی کس کامیابی سے اس کا اندازہ گراف کاغذ کے خانوں، نقطوں اور منحنیات کو دیکھنے سے ہوسکتا ہے، اس لئے میں ان شکلوں کو بطور نمونہ کے پیش نہیں کرنا چاہتا اگرچہ انہی شکلوں کے نقطہ بنقطہ بنانے اور کھینچنے میں اور انہی شکلوں کے متعلق کاتبوں اور سنگ سازوں کو بار بار ہدایات دینے میں جسقدر وقت صرف ہوا ہے وہ اصل کتاب کے لکھنے میں صرف نہیں ہوا۔ ممالک محروسہ سرکار عالی کے متعلق جملہ اعداد و شمار بستان آصفیہ سے لئے گئے ہیں، میں اس جگہ اس مفید کتاب کے مؤلف کا خاص طور پر شکریہ ادا کرتا ہوں۔
ترسیمات ہندسۂ تحلیلی کی اور اس لحاظ سے ریاضی جدید کی ابتدا ہیں، دو متغیروں کے باہمی انحصار کو یعنی **تفاعل** کے مفہوم کو واضح طور پر ایک شکل میں مبتدی کو دکھانے کے لئے ترسیم خاص اہمیت رکھتی ہے اسکی ضرورت ہر جگہ مسلمہ ہے اور اس کا احاطۂ استعمال ابتدائی اور اعلیٰ ریاضی، سائنس اور انجینیرنگ میں ہی نہیں بلکہ اور غیر متعلقہ مضامین معاشیات، سیاسیات وغیرہ وغیرہ میں روزانہ بڑھتا جا رہا ہے، آئے دن اپنے کاروبار میں تاجر لوگ اسے بلا تکلف ان چیزوں کے متعلق جو ان کے کسی گودام میں موجود نہیں ہوتیں ایسی ایسی لمبی فہرستیں مرتب کرنے میں استعمال کرتے ہیں جن میں ہر ایک شئے اور اس کے ہر ایک ناپ اور پیمانہ کی قیمت بڑی صحت سے مندرج ہوتی ہے، ہسپتالوں کے ہر کمرہ میں "گراف پیپر" ہر مریض کے سرھانے موجود ہیں جن میں اس کی ہفتوں اور مہینوں

کی ٹمپریچر ترسیم کو فقط ایک نظر دیکھنے سے معلوم ہو سکتی ہے۔
اُمید کیجاتی ہے کہ عثمانیہ مٹریکیولیشن کے طالب علم اس
چھوٹی سی کتاب کے مطالعہ سے فائدہ اُٹھائیں گے اور کالج کی جماعتوں
میں آنے سے قبل ترسیمات کے چند سادہ اصولوں سے واقف ہو گئے۔

قاضی محمد حسین

۱۴ / امرداد ۱۳۳۱ ف

فہرست مضامین

نمبر شمار	مضمون	صفحہ
۱	باب اوّل	
۲	مثبت اور منفی فاصلے	۱
۳	ایک خط پر کے کسی نقطہ کا تعین	۸
۴	سطح مستوی پر کے نقاط کی تعیین	۱۵
۵	باب دوم	
۷	خطی مساوات کی ترسیم	۴۰
۸	خطی ہمزاد مساواتوں کا ترسیمی حل	۷۶
۹	باب سوم	
۱۰	خطی کلیہ	۹۷
۱۱	عام ترسیمیں	۱۲۸
۱۲	باب چہارم	
۱۳	مساوات درجہ دوم	۱۵۹
۱۴	مساوات درجہ دوم کا ترسیمی حل	۱۹۳
۱۵	جوابات	۲۲۱

۶۸۶

ترسیمات

۱۔ مثبت اور منفی فاصلے۔ اس شکل میں ایک افقی مستقیم خط ہے جو دونوں طرف غیر محدود ہے۔



ایک نقطہ اس پر حرکت کرتا ہے اور ا سے چل کر ب پر پہنچتا ہے۔

علاوہ اور چیزوں کے اس نقطہ کے متعلق دو باتوں کا معلوم ہونا ضروری ہے، ایک یہ کہ اس نے کتنا فاصلہ طے کیا دوسرے کس سمت میں کیا۔

اگر ا اور ب کا درمیانی فاصلہ ۴ میل ہو جو ایک میل فی سنٹی میٹر کے حساب سے شکل میں دکھایا گیا ہے تو اس صورت میں نقطہ مذکور نے "۴ میل کا فاصلہ دائیں جانب" طے کیا ہے۔

اب فرض کرو کہ یہ نقطہ ب سے چل کر واپس ا پر پہنچتا ہے، اس صورت میں اس نے " ۴ میل کا فاصلہ بائیں جانب"

طے کیا۔

دونوں صورتوں میں مطلق فاصلہ طے شدہ وہی ہے یعنی ۴ میل، صرف فرق یہ ہے کہ اگر ایک فاصلہ ایک سمت میں طے ہوا ہے تو دوسرا اس کی متقابل سمت میں طے ہوا ہے۔

پس اگر ہم فاصلوں کو عددوں سے تعبیر کر کے اپنے احاطہ تحقیقات میں لانا چاہتے ہیں تو ہمیں فاصلہ کی سمت کو تعبیر کرنے کی تدبیر کرنی چاہیئے۔

علم حساب میں عدد مطلق سے بحث تھی، جبر و مقابلہ میں منفی عددوں کے تخیل کو زیادہ کرنا پڑا اور مثبت اور منفی اعداد کی تشریح کے لئے عام فہم مثالیں سوچنا پڑیں، مثلاً ہم اس سے واقف ہیں کہ لین دین، نفع نقصان، درآمد برآمد کی سی عام باتیں عددوں کے ماقبل مثبت اور منفی علامتیں رکھنے سے تعبیر ہو سکتی ہیں، مثلاً تین روپیہ کا نفع + ۳ سے اور تین روپیہ کا نقصان −۳ سے تعبیر ہو سکتا ہے۔

ان مثالوں سے ایک اصولی بات معلوم ہوتی ہے کہ اگر ایک عمل یہ صلاحیت رکھتا ہو کہ وہ عددوں سے تعبیر ہو سکے تو مثبت اور منفی علامتوں کے استعمال سے یہ عمل اور اس کا اُلٹ (یعنی متضاد) تعبیر ہو سکتے ہیں۔

اب چونکہ فاصلہ عددوں سے تعبیر ہو سکتا ہے اسلئے اس کی سمت کو ظاہر کرنے کی ایک تدبیر یہ ہے کہ ہم علامات جبریہ مثبت اور منفی سے کام لیں۔

پس اوپر کی شکل میں اگر اُس فاصلہ کو جو متحرک نقطہ ا سے ب تک جانے میں طے کرتا ہے + ۴ سے تعبیر کیا جائے تو ب سے ا تک کے فاصلہ کو - ۴ سے تعبیر کیا جائے گا، یہ بالکل اختیاری امر ہے کہ ہم کس سمت کے طے کردہ فاصلوں کو مثبت قرار دیں مگر آئندہ ہمیشہ کے لئے ہم مان لیتے ہیں کہ دائیں سمت کے طے کردہ **فاصلے مثبت** اور بائیں **سمت** کے **فاصلے منفی خیال کئے جائینگے۔**

مثلاً اگر شکل میں ب اور ج کا درمیانی فاصلہ ۶ میل ہو تو ب سے ج تک جانے میں متحرک نقطہ - ۶ میل فاصلہ طے کرے گا اور ج سے ا تک جانے میں + ۲ میل

اگر یہی نقطہ ا سے ب تک اور پھر ب سے ج تک جائے تو یہ + ۴ - ۶ = - ۲ میل فاصلہ طے کرے گا، دراصل اس کی مسافت تو ۱۰ میل ہے لیکن اگر سمت کو ملحوظ رکھا جائے تو ایسا خیال کیا جائے گا کہ اس نے صرف - ۲ میل فاصلہ طے کیا ہے یعنی کل مسافت کے بعد یہ اپنے آپ کو نقطہ ابتدائی ا کے ۲ میل بائیں جانب پاتا ہے۔ اسی طرح کوئی نقطہ د، افقی خط پر ایسا ہے کہ ب اور د کا درمیانی فاصلہ ۹ میل ہے، اگر ایک شخص نقطہ ابتدائی ب سے ا تک، ا سے د تک اور د سے ج تک جائے تو وہ فاصلہ - ۴ - ۵ + ۳ = - ۶ میل طے کریگا یعنی اس مسافت کے بعد وہ اپنے آپ کو مقام ب سے جہاں سے وہ چلا تھا

۶ میل بائیں جانب پائے گا۔ پس اس طرح سے ایک متحرک شے کا وہ فاصلہ جو اس نے فی الحقیقت طے کیا ہے حاصل نہیں ہوتا بلکہ وہ فاصلہ حاصل ہوتا ہے جو دائیں بائیں پھرنے پھرانے کے بعد اس کے آخری مقام اور ابتدائی مقام کے درمیان ہے۔

اسی طرح اگر انتصابی یا کھڑے خط پر فاصلے ناپنے کی ضرورت ہو تو ایک سمت کو مثبت خیال کرنا پڑے گا اور متقابل سمت کو منفی۔

اس صورت میں بھی ہم مان لیتے ہیں کہ اوپر کی طرف (راسی سمت میں ↑) جو فاصلے ناپے جائیںگے وہ مثبت ہونگے اور جو نیچے کی طرف (شاقولی سمت میں ↓) ناپے جائیںگے وہ منفی ہونگے۔

مثلاً ا سے ب تک جانے میں جو فاصلہ طے ہو گا اس کو +۴ سے اور ب سے ا تک کے فاصلہ کو -۴ سے تعبیر کیا جائے گا۔ اسی طرح ب سے ج تک جانے کا فاصلہ -۶ ہے اور ج سے ا تک کا فاصلہ +۲ ہے وغیرہ وغیرہ۔

ب
ا
ج
د

۲۔ ایسا جملہ بار بار استعمال ہوتا ہے " وہ فاصلہ جو ایک متحرک شے ا سے ب تک جانے میں طے کرتی ہے" اس جملہ کی بجائے اختصار کی خاطر ہم " ا ب " لکھتے ہیں جہاں نقطہ ابتدائی کو

پہلے لکھا گیا ہے اور نقطہ آخری ب بعد میں۔ اس طرح ج د سے وہ فاصلہ مراد ہوگا جو ایک شخص یا کوئی متحرک شے ج سے د تک جانے میں طے کرتی ہے، پس ا ب ایک مثبت عدد کے مساوی ہوگا اگر ب، ا کے دائیں جانب ہو اور منفی ہوگا اگر ب، ا کے بائیں جانب ہو، مثلاً

خط (۱) سے ا ب = +۳ (۱)

اور خط (۲) سے ا ب = -۳ (۲)

معلوم ہوا کہ ا ب جبریہ مقداروں کی طرح مثبت اور منفی ہو سکتا ہے اور در اصل یہ ہے بھی "فاصلہ مع سمت"۔ اس کو ہم سمتی حصہ یا صرف سمتی کہیں گے۔

اگر ایک خط پر کسی ترتیب سے دو نقطے ا اور ب لئے جائیں مثلاً اوپر کے خط (۲) میں تو اس سے:

ا ب = -۳

اور اسی خط سے ب ا = +۳، پس اگر ہم ا ب کو مقادیر ریاضی میں شریک کریں تو لازماً

ا ب + ب ا = -۳ + ۳ = ۰

یعنی ا ب + ب ا = ۰ ....(۱)

خواہ ب، ا کے کسی جانب واقع ہو۔

اس مساوات کا مطلب یہ ہے کہ اگر ایک متحرک شے ا سے ب تک جائے اور پھر ب سے ا پر واپس آجائے تو نقطہ ابتدائی سے اس کا فاصلہ طے کردہ صفر ہوگا۔

اسی طرح اگر تین نقطے ا، ب، ج ایک خط پر کسی ترتیب سے لئے جائیں تو یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ان نقاط کے سب مقامات کے لئے



اب + ب ج = اج .... (۲)

یعنی اگر ایک متحرک شئے ا سے ب تک، پھر ب سے ج تک جائے تو اس مسافت کے بعد وہ نقطہ ابتدائی سے بلحاظ سمت و مقدار کے اتنے ہی فاصلہ پر ہوگی گویا کہ وہ سیدھی ا سے ج تک گئی۔ مختلف صورتوں میں فاصلے ناپنے سے طالب علم خود اسکی تصدیق کرے۔

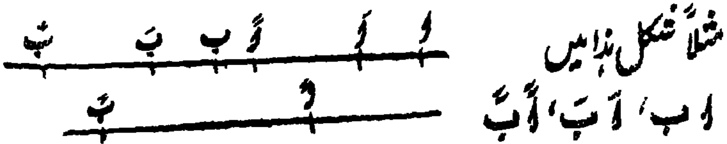
اب ظاہر ہے کہ دو یا زیادہ سمتی حصے اب، اَبَ، اً بً باہم ہر طرح سے مساوی ہونگے اگر

(۱) وہ مقدار میں مساوی ہوں

اور (۲) ان کی سمتیں ایک ہی ہوں

اور (۳) وہ ایک ہی خط پر یا متوازی خطوط پر ناپے گئے ہوں

مثلاً شکل ہذا میں

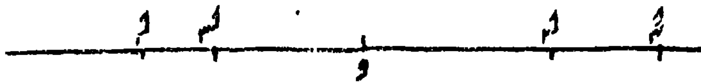


اب، اَبَ، اً بً

وغیرہ سب - ۳ سے تعبیر ہونگے۔

اب ہم یہ قید لگاتے ہیں کہ سب فاصلے ایک ہی خط پر

اور ایک ہی نقطہ سے ناپے جائیں یعنی ہر صورت میں مقام ابتدائی و ایک ہی ہو، اس طرح سے ۳- کے مقابل ایک اور صرف ایک ہی سمتی و ا ہوگا جہاں نقطہ ا ایک مقررہ مستقیم خط پر و کے بائیں جانب ۳ اکائیوں کے فاصلہ پر ہے۔



اسی طرح کسی اور عدد ۳-، ۵ء۲، ۲-، ۴ وغیرہ کے مقابل صرف ایک سمتی ہوگا دیکھو شکل بالا اس سے قبل ایک ہی عدد سے بیشمار سمتی یا فاصلے تعبیر ہو سکتے تھے، صرف نقطہ ابتدائی کو ثابت کر دینے سے ہر عدد کے مقابل ایک فاصلہ اور ہر فاصلہ کے مقابل ایک ہی عدد رہ جاتا ہے۔ اس امر کو ہم اگلی دفعہ میں استعمال کرینگے۔

و ا = ۳-
و ا = ۵ء۲
و ا = ۲-
و ا = ۴

امثلہ نمبری ا

۱- پیمانہ سے ناپ کر معلوم کرو کہ ذیل کے افقی خط پر فاصلے ع ج، ر ع، د ع، ر ا، د ب، د ج کن اعداد سے تعبیر ہونگے؟



۲- انتصابی خط (۲) پر فاصلے ا ل، ل م، م ج، ا س، د ج، ر ل کن اعداد سے تعبیر ہونگے؟

۳- افقی خط (۱) پر ایک شخص ج سے ب تک، ب سے ا تک، ا سے د تک، د سے ر تک چلتا ہے، اس کو عددوں میں تعبیر کرو۔

اگر ایک سنٹی میٹر ایک میل کو تعبیر کرے تو بتاؤ کہ وہ تمام مسافت کے بعد اپنی سمت روانگی میں کتنے میل چلا۔

۴۔ شکل سے ثابت کرو کہ

(۱) ۲ − ۶ + ۱۱ − ۷ = ۰

(۲) ۱٫۵ + ۴٫۵ − ۲ + ۴٫۵ + ۲٫۵ − ۹٫۵ = ۱٫۵

۵۔ ایک مستقیم خط ا ب پر نقطے ا$_۱$، ا$_۲$، ا$_۳$ کسی ترتیب سے لئے گئے ہیں ثابت کرو کہ

(۱) ا ا$_۱$ + ا$_۱$ ا$_۲$ + ا$_۲$ ا$_۳$ + ا$_۳$ ب = ا ب

(۲) ا ا$_۱$ + ا$_۱$ ا$_۲$ + ا$_۲$ ا$_۳$ + ا$_۳$ ا = ۰

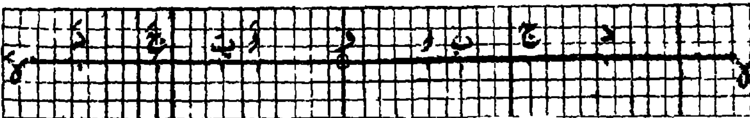
۶۔ ایک غیر محدود خط ا ب پہ کوئی نقطہ و لیا گیا ہے، ثابت کرو کہ و کے تمام مقامات کے لئے

ا ب = و ب − و ا

۷۔ ایک غیر محدود خط ا ب پر کوئی نقطہ و لیا گیا ہے، اگر ا ب کا وسطی نقطہ م ہو تو ثابت کرو کہ و کے سب مقامات کے لئے

۲ و م = و ا + و ب

۳ ایک خط پر کسی نقطہ کا تعین



فرض کرو کہ ایک مستقیم خط لاَ لا پر کوئی نقطہ ا ہے اور اس نقطہ کا مقام

دریافت کرنا مطلوب ہے۔

عام طور پر کسی مقام کی تعیین اُس صورت میں ممکن ہے جب کہ اس کے قریب کوئی ایسی جگہ واقع ہو جس کے مقام اور محل سے ہم بخوبی واقف ہوں اور بلحاظ جس کے مقام مذکور کی تعیین ہو سکتی ہو۔

اس لئے ا کا مقام معلوم کرنے کے لئے ہم کوئی نقطہ و مستقیم خط پر مقرر کرتے ہیں اور اس نقطہ کے لحاظ سے اس خط پر کے تمام نقطوں کے مقام معلوم کرتے ہیں، پس و ہمارا ابتدائی نقطہ ہے، آئندہ ہمارے سب فاصلے اس ثابت نقطہ سے ناپے جائینگے۔ اس نقطہ کو ہم مبدأ کہیں گے۔

ظاہر ہے کہ نقطہ ا (یا کسی اور نقطہ) کے مقام کا تعیّن ہو سکے گا اگر اس کا فاصلہ ابتدائی نقطہ و سے معلوم ہو اور پھر بھی معلوم ہو کہ نقطہ ا، و کے کس جانب واقع ہے۔ اب شکل صفحہ ۸ میں ا، و سے ۵ اکائیاں دائیں جانب واقع ہے اس لئے حسب دفعہ ا فاصلہ وا + ۵ سے تعبیر ہوگا، نیز چونکہ سب فاصلے ایک ثابت نقطہ و سے ناپے جارہے ہیں اس لئے + ۵ سے اور کوئی فاصلہ بجز ماسوائے وا کے تعبیر نہیں ہو سکتا اور فاصلہ وا طے کرنے سے (یعنی و سے ۵ اکائیاں دائیں جانب جانے سے) ہم ایک اور صرف ایک ہی نقطہ ا پر پہنچتے ہیں، اس لحاظ سے ہم + ۵ کو نقطہ ا کا محدّد

کہتے ہیں۔ اسی طرح اگر ہم و سے ۵ اکائیاں بائیں جانب جائیں تو ہم صرف ایک نقطہ اَ پر پہنچتے ہیں، اس لحاظ سے -۵ نقطہ اَ کا محدد ہے۔ ظاہر ہے کہ ہمیں اس طرح ایک ہندسی نقطہ کو عددوں کے ذریعہ نامزد کرنے کی ایک نئی ترکیب حاصل ہوتی ہے

مثلاً	+۷	محدد ہے	نقطہ	ب کا
	-۷	"	"	بَ کا
	+۱۱	"	"	ج کا
	-۱۱	"	"	جَ کا
	صفر	"	"	و کا

اور	د	کا	محدد	+۵ء۱۵ ہے
	دَ	"	"	-۵ء۱۵ ہے
	ب	"	"	+۷ ہے
	بَ	"	"	-۷ ہے
	و	"	"	صفر ہے

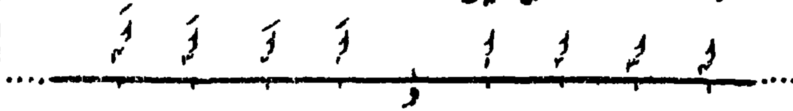
پس ہر عدد (مثبت، منفی، مکسور) کے جواب میں خط لاَ لا پر ایک نقطہ ہے اور ہر نقطہ کے ساتھ اس طرح سے ایک اور صرف ایک عدد منسلک ہے جس کو ہم نے اس نقطہ کا محدد کہا ہے۔

طالب علم جانتا ہے کہ تمام حقیقی اعداد سلسلہ ذیل میں شامل ہیں

......، -۷، -۶، -۵، -۴، -۳، -۲، -۱، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ...... (۱)

اس سلسلہ میں علاوہ صحیح عددوں کے کسریں بھی موجود ہیں اگرچہ لکھی نہیں گئیں مثلاً ۱ اور ۲ کے درمیان $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$

وغیرہ سب موجود ہیں۔ اب اس سلسلہ اعداد کے ہر ایک عدد یا کسر کے جواب میں خط مستقیم پر ایک اور صرف ایک نقطہ حاصل ہوتا ہے ملاحظہ ہو شکل ذیل



اور برعکس اس کے سب نقاط و، ا۱، ا۲، ا۳، ا۴... اَ۱، اَ۲، اَ۳، اَ۴، کے محدد بالترتیب ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ...، -۱، -۲، -۳، -۴... ہیں۔

اب کوئی عام نقطہ ن اس خط پر فرض کرو، اس کے محدد کو ہم ایک جبریہ حرف لا سے تعبیر کر سکتے ہیں جہاں لا اس کا فاصلہ ہے مبدأ و سے، یہ نقطہ عام اس لئے ہے کہ باقی سب نقطوں کے محدد اس کے محدد کی جبریہ صورت لا میں شامل ہیں۔ مثلاً اگر لا = ۱ تو نقطہ ن ایک خاص نقطہ ا۱ پر ہوگا اور جب لا = -۳ تو ن اَ۳ پر ہوگا وغیرہ وغیرہ

ظاہر ہے کہ ایک متحرک نقطہ کے محدد کو بھی ہم ایک حرف لا سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ جیسے نقطہ مذکور خط کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک حرکت کرے گا تو اس کا محدد لا اوپر کے سلسلہ اعداد (۱) کی سب قیمتیں اختیار کریگا۔

۴۔ دفعہ سابق میں ہم نے ایک افقی خط کے سب نقطوں کو عددوں کے ذریعہ تعبیر کیا، اسی طرح ایک انتصابی خط پر کے سب نقطے مثبت اور منفی عددوں کے ذریعہ نامزد

ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ مَا و ما ایک غیر محدود انتصابی خط ہے، یہ ہم پہلے فیصلہ کر چکے ہیں کہ جو فاصلے اوپر کی سمت میں ناپے جائینگے وہ مثبت ہونگے اور جو نیچے کی طرف ناپے جائیں گے وہ منفی ہونگے۔

اب ہم اپنا نقطہ ابتدائی یعنی مبدأ و اس خط پر مقرر کرتے ہیں، سب فاصلے نقطہ و سے ناپے جائیں گے۔

ظاہر ہے کہ + ۳٫۵ سے صرف فاصلہ و ا تعبیر ہوتا ہے اور یہ فاصلہ و ا طے کرنے سے (یعنی و سے ۳٫۵ اکائیاں اوپر کی طرف جانے سے) ایک اور صرف ایک نقطہ ا حاصل ہوتا ہے، اس لحاظ سے ہم + ۳٫۵ کو نقطہ ا کا محدد کہتے ہیں۔ اسی طرح و سے ۳٫۵ اکائیاں نیچے کی طرف جانے سے ہم صرف نقطہ اَ پر پہنچتے ہیں، اسلئے - ۳٫۵ نقطہ اَ کا محدد ہے۔

پس ہر مثبت یا منفی عدد کے جواب میں خط مَا و ما پر ایک اور صرف ایک نقطہ ہے اور بلحاظ مبدأ و کے اس خط پر کے ہر نقطہ کا ایک اور صرف ایک محدد ہے۔

مثلاً +۱۱ محدد ہے نقطہ ب کا

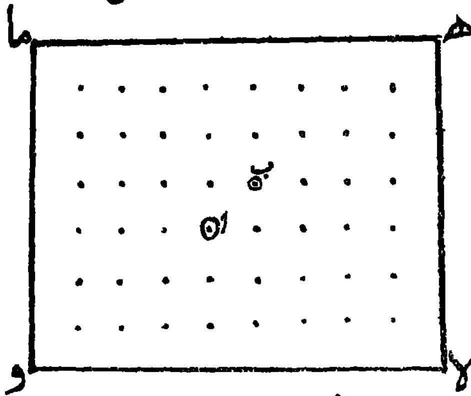
۱۱- محدد ہے نقطہ ب کا
$\frac{1}{2}$ " " ج "
$-\frac{1}{2}$ " " جَ "

اور نقطہ ب کا محدد +۱۱ ہے
نقطہ جَ " " $-\frac{1}{2}$ ہے وغیرہ وغیرہ

۵- گزشتہ دفعات میں ہم نے ایک مستقیم خط پر کے کسی نقطہ کا تعین بلحاظ ایک ثابت نقطہ کے کیا۔ ہم نے دیکھا کہ ایک نقطہ کا مقام مقرر کرنے کے لئے ایک پیمایش یعنی ایک عدد کی ضرورت ہوتی ہے۔

اب ہم ایک مستوی سطح پر کے تمام نقطوں کے مقام متعیّن کرتے ہیں۔

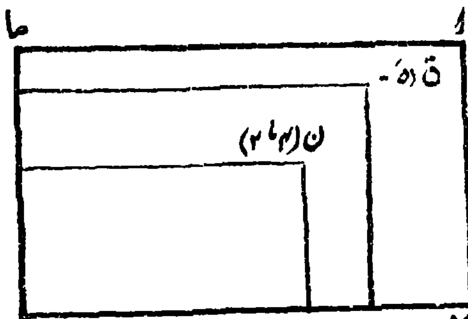
اس شکل میں کسی جماعت کے چند لڑکوں کی نشستیں دکھائی گئی ہیں۔



فرض کرو کہ ہم لڑکے ا کی نشست کا کسی شخص کو پتہ دینا چاہتے ہیں، تو اغلباً ہم یہ کہیں گے کہ اس کی نشست بائیں طرف سے چوتھی اور نیچے سے تیسری ہے، یعنی ا کی نشست کا تعیّن دو پیمائشوں سے ہوگا ایک تو اس کے فصل محور و ما سے جو ۴ ہے دوسرے اس کے فصل محور و لا سے جو

۳ ہے، پس اگر ہر نشست کے لئے ہم پیمائش کی یہی ترتیب مقرر کریں یعنی پہلے وما سے پھر ولا سے تو دو اعداد (۴،۳) سے اکی نشست کا تعین ہو سکتا ہے، اسی طرح سے اعداد (۵،۴) نشست ب کا تعین کرتے ہیں۔ وغیرہ وغیرہ

اب فرض کرو کہ



ولا اصا ایک مستطیل شکل کی میز ہے، اور اس پر کوئی نقطہ ن ہے جس کا مقام ہم عددوں کے ذریعہ متعین کرنا چاہتے ہیں، ظاہر ہے کہ اگر میز کے دو متصل کناروں سے ن کے فاصلے ناپے جائیں تو ان فاصلوں کے ذریعہ ہم اس نقطہ کا تعین کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ یہہ کنارے ولا اور وما ہیں۔ اب اگر ایک سنتی میٹر ایک فٹ کو تعبیر کرے تو ن کا فاصلہ وما سے ۴ فٹ ہے اور ولا سے ۲ فٹ۔

پس اگر ہر نقطہ کے یہ فاصلے اسی ترتیب سے ناپے جائیں یعنی پہلے وما سے اور پھر ولا سے تو اعداد (۴، ۲) نقطہ ن کے مقام کی پورے طور پر تعیین کرتے ہیں۔ یہ اس طرح سے بھی ظاہر ہے کہ اگر ہم و سے شروع ہوکر ولا پر ۴ فٹ جائیں، پھر ۲ فٹ وما کے متوازی چلیں تو ہم میز کے

ایک اور صرف ایک ہی نقطہ ن پر پہنچتے ہیں، پس ن کے مقام کا تعین (۴، ۲) سے ہو سکتا ہے۔

اسی طرح سے ق کے مقام کا تعین (۵، ۳) سے ہوسکتا ہے کیونکہ ق کا فاصلہ وما سے ۵ فٹ ہے اور ولا سے ۳ فٹ، یا اگر ہم و سے شروع ہوکر ولا پر ۵ فٹ پھر وما کے متوازی ۳ فٹ جائیں تو ہم صرف نقطہ ق پر پہنچتے ہیں۔

اس سے ظاہر ہے کہ ایک سطح مستوی پر کسی نقطہ کا مقام مقرر کرنے کے لئے دو پیمائشوں کی ضرورت ہوتی ہے یعنی سطح پر کا کوئی نقطہ دو عددوں سے تعبیر ہوگا۔

میز کی صورت میں سطح مستوی محدود ہے، لیکن ہمارے خطوطِ مستقیم (دفعات ۳ اور ۴) کی طرح یہ سطح بھی ہر سمت میں غیر محدود ہوسکتی ہے اور اس پر کے ہر نقطہ کا تعین دو پیمائشوں یا دو عددوں کے ذریعہ ہو سکتا ہے بشرطیکہ ہم فاصلوں کی سمتوں کو ملحوظ رکھیں۔

۶۔ سطح مستوی پر کے نقاط کی تعیین۔ فرض کرو کہ ایک سطح مستوی چاروں طرف غیر محدود ہے اور اس پر کے تمام نقطوں کا تعین ہم عددوں کے ذریعہ کرنا چاہتے ہیں۔

اس سطح پر ایک نقطہ ا لو جس کی تعیین منظور ہے۔

سب سے پہلے ہم اس سطح مستوی پر کوئی نقطہ ابتدائی و مقرر کرتے ہیں جس سے ہمارے سب فاصلے ناپے جائیں گے، اس نقطہ کو ہم مبدأ کہیں گے۔

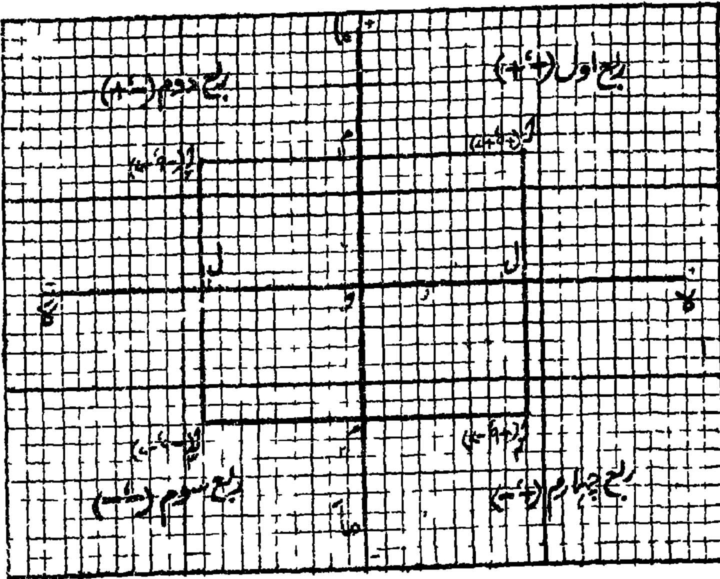
نیز فاصلوں کی سمتوں کو مقرر کرنے کے لئے مبدأ میں سے گزرتے ہوئے دو غیر محدود مستقیم خط لاَ و لا اور مَا و ما کھینچو جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہوں دیکھو شکل صفحہ ۱۷۔

ان فاصلوں کی سمتوں کو تعبیر کرنے کے لئے ہم اُن حسابی دستوروں کو ملحوظ رکھیں گے جو ہم پہلے مقرر کر چکے ہیں یعنی

(۱) جو فاصلے لاَ و لا پر یا اس کے متوازی دائیں جانب و لا کی سمت میں ناپے جائینگے وہ مثبت عددوں سے تعبیر ہونگے اور جو بائیں جانب و لاَ کی سمت میں ناپے جائیں گے وہ منفی عددوں سے تعبیر ہونگے۔

(۲) اور اسی طرح جو فاصلے دوسرے خط مَا و ما پر یا اس کے کسی متوازی خط پر اوپر کی جانب، و ما کی سمت میں ناپے جائیں گے وہ مثبت ہونگے اور جو نیچے کی طرف یعنی و مَا کی سمت میں ناپے جائیں گے وہ منفی ہونگے۔

خطوط لاَ و لا اور مَا و ما کو حوالہ کے محور یا اختصاراً صرف محور کہتے ہیں بعض اوقات لاَ و لا کو محور لا اور مَا و ما کو محور ما بھی کہتے ہیں۔ ان پر مثبت یا منفی علامتیں لکھدی گئی ہیں جو ان کی سمتوں کو تعبیر کرتی ہیں۔



نقطہ ا سے ان محوروں پر عمود ال، ام نکالو۔

اب و سے ا تک پہنچنے کا ایک طریقہ یہ ہے کہ ہم فاصلہ ول دائیں جانب محور لا پر چلیں اور پھر فاصلہ ل ا (یعنی فاصلہ وم) محور ما کے متوازی اوپر کی طرف طے کریں، یہ فاصلے (ول، ل ا) اس نقطہ کے ساتھ خاص طور پر منسوب ہیں، ان کو طے کرنے سے ہم سطح کے ایک اور صرف ایک نقطہ ا پر پہنچ سکتے ہیں۔ اس لحاظ سے ان فاصلوں یعنی ول، ل ا کو نقطہ ا کے محدد کہتے ہیں، ان کی اہمیت کی وجہ سے ان فاصلوں کو الگ الگ نام دئے گئے ہیں، فاصلہ ول

کو جو محور لالا اس کے کسی متوازی پر طے کیا گیا ہے نقطہ ا کا فصلہ کہتے ہیں اور ل ا کو جو محور ما کے متوازی طے کیا گیا ہے نقطہ ا کا معیّن کہتے ہیں - طالب علم ان ناموں سے مرعوب نہ ہو جائے یہ محض اس نقطہ کے فاصلے ہیں دو خطوں سے -

پس نقطہ ا کے محدد ول اور ل ا ہیں، لیکن پیشتر اس کے کہ ہم ان فاصلوں کی پیمائش کر سکیں ہمیں فاصلہ ناپنے کی ایک اکائی مقرر کر لینی چاہیئے، لیکن یہ ضروری نہیں کہ محور لا اور محور ما پر کے فاصلوں کی اکائیاں مساوی ہوں، ہم محور لا اور اس کے متوازی فاصلوں کے لئے اکائی ور اور محور ما اور اس کے متوازی فاصلوں کے لئے اکائی وس فرض کر سکتے ہیں، مگر فی الحال سہولت کے لئے ہم یہ مان لیں گے کہ یہ اکائیاں دونوں محوروں کیلئے مساوی ہیں اور مربع دار کاغذ کے چھوٹے خانہ کا طول دونوں محوروں پر ایک اکائی کو تعبیر کرتا ہے یعنی ۱/۱۰ انچ (۱/۱۰) = ۱

پس اس اکائی کے موافق فاصلہ ول = +۹ اور ل ا = +۷، اس لئے نقطہ ا کے محدد (+۹، +۷) ہوئے، پس ایک ہندسی نقطہ ا کا نام عددوں میں (+۹، +۷) رکھا گیا۔

یاد رہے کہ اس عددی تعبیر میں ہم نے محور لا کے متوازی فاصلہ (فصلہ) کو پہلے لکھا ہے اور محور ما کے متوازی فاصلہ (معیّن) کو بعد میں۔ آئندہ سب نقطوں کے لئے یہی طریق کتابت قائم رکھا جائے گا۔

حوالہ کے محور مستوی سطح کو چار حصوں یا ربعوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

سطح کے اُس حصہ کو جو ولا اور وما سے گھرا ہوا ہے ربع اوّل کہتے ہیں۔ اور جو وما اور ولاَ سے گھرا ہوا ہے اسکو ربع دوم کہتے ہیں۔ اسی طرح سے جو ولاَ اور ومَا کے درمیان ہے اس کو ربع سوم اور جو ومَا اور ولا کے درمیان ہے اس کو ربع چہارم کہتے ہیں۔

ہم نے نقطہ ا کو ربع اول میں لیا اور دیکھا کہ اس کے دونوں محدد (+۹، +۷) مثبت عدد ہیں، نیز ظاہر ہے کہ ربع اول میں ہر نقطہ کے محدد دو مثبت عدد ہونگے کیونکہ اس ربع کے کسی نقطہ تک پہنچنے کے لئے ہمیں محور لا پر دائیں جانب اور پھر سیدھا اوپر کی طرف جانا پڑتا ہے اور یہ محوروں کی مثبت سمتیں ہیں۔

اب ہم باقی تین ربعوں میں ایک ایک نقطہ لینے سے دیکھتے ہیں کہ ان ربعات کے متعلقہ محددوں کی علامتیں کیا ہونی چاہئیں۔ مناسب ہوگا کہ بلحاظ محوروں کے نقطہ ا کے عکس لینے سے جو مستطیل بنے اس کے راسوں کے محدد معلوم کئے جائیں۔ ان سے علامات مذکورہ کا پتہ چلے گا۔

یہ مستطیل ہندسی طریق پر اس طرح بنے گا، ال۱ اور ام۱ محوروں پر عمود ہیں، ام۱ کو ا۲ اتنا خارج کرو کہ ا۲م۱ = م۱ا اور ال۱ کو ا۴ تک اتنا خارج کرو کہ ا۴ل۱ = ل۱ا

اب اس متوازی الاضلاع کی تکمیل کرو جس کے راس ا، ا۱، ا۲ ہیں اور چوتھے راس کا نام ا۳ رکھو۔ نیز فرض کرو کہ ا۱ ا۲ محور لا کو ل۱ پر اور ا۲ ا۳ محور ما کو م۱ پر کاٹتے ہیں۔

اب و سے ا۱ تک پہنچتے ہیں فاصلہ و ل۱ بائیں جانب محور لا پر اور ل۱ ا۱ اوپر کی طرف محور ما کے متوازی جانا پڑتا ہے اور چونکہ و ل۱ = -۹، ل۱ ا۱ = +۷

اس لئے ا۱ کے محدد (-۹، +۷) ہیں۔

نیز و سے ا۲ تک پہنچنے کے لئے ۹ اکائیاں بائیں جانب اور ۷ اکائیاں نیچے کی طرف جانا پڑتا ہے۔ اس لئے ا۲ کے محدد (-۹، -۷) ہیں۔

اسی طرح و سے ا۳ تک پہنچنے کے لئے ۹ اکائیاں دائیں جانب اور ۷ اکائیاں نیچے کی طرف جانا پڑتا ہے اس لئے ا۳ کے محدد (+۹، -۷) ہیں۔

یاد رہے کہ نقاط ا، ا۱، ا۲، ا۳ کے محددوں کی عددی قیمتیں ایک ہی ہیں ۹ اور ۷، لیکن ان کے قبل مثبت اور منفی علامتیں مختلف ترتیبوں میں رکھنے سے ہمیں چار مختلف نقطے سطح پر حاصل ہوتے ہیں، اسی طرح عددوں کے کسی جوڑے سے ہمیں چار نقطے ملیں گے۔

اب ہم چاروں ربعات کے محددوں کی علامتوں کا فیصلہ کر سکتے ہیں۔

ربع اول میں کے تمام نقطوں کیلئے دائیں جانب اور اوپر جانا پڑتا ہے اسلئے محددوں کی علامتیں (+، +) ہیں

ربع دوم " بائیں جانب اور اوپر " " (−، +)

ربع سوم " بائیں جانب اور نیچے " " (−، −)

ربع چہارم " دائیں جانب اور نیچے " " (+، −)

اب اگر سطح کے کسی نقطہ کے محدود دئے ہوئے ہوں تو ہم محض دیکھنے سے معلوم کرسکتے ہیں کہ یہ نقطہ کس ربع میں واقع ہے۔

اوپر کے سب نقطوں کے محدد عددی تھے اس لحاظ سے یہ خاص نقطے کہلاتے ہیں، اب فرض کرو کہ کوئی عام نقطہ ن ہے اور اس پر پہنچنے کے لئے ہمیں فاصلہ لا محور لا پر اور فاصلہ ما محور ما کے متوازی جانا پڑتا ہے تو اس نقطہ ن کے محدد (لا، ما) ہونگے۔

یاد رہے کہ لا، ما محض عدد ہیں، صرف انہوں نے جبر و مقابلہ کا حرفی لباس پہنا ہوا ہے، یہ عام سے عام نقطہ ن کے محدد ہیں اور وہ اس لئے کہ اس نقطہ کے محددوں (لا، ما) کو خاص عددی قیمتیں دینے سے اس سطح پر کے تمام نقطے حاصل ہو سکتے ہیں۔ مثلاً اگر (لا، ما) کیجگہ اعداد ذیل کے زوج (۰، ۰)، (+۹، +۷)، (−۹، +۷)، (−۹، −۷)، (+۹، −۷) (+۹، ۰)، (−۹، ۰)، (۰، +۷)، (۰، −۷) وغیرہ مندرج کئے جائیں تو خاص نقاط و، ا، ا۲، ا۳، ا۴، ل، ل۲، م، م۲ وغیرہ حاصل ہوتے ہیں۔

یہ عام سے عام محدد (لا، ما) جبریہ حروف کو استعمال کرنے سے حاصل ہوئے گویا (لا، ما) ایک نقطہ کے محددوں کی جبریہ صورت ہے۔

نوٹ۔ اس دفعہ میں ہم نے ا کے محدد ول، ل ا مقرر کئے ہیں۔

ظاہر ہے کہ محوروں سے ا کے عمودی فاصلے (م ا، ل ا) بھی اس کے مقام کا تعین کر سکتے ہیں۔ یعنی ہم (م ا، ل ا) کو بھی نقطہ ا کے محدد کہہ سکتے ہیں اور چونکہ ول بلحاظ سمت اور پیائش کے م ا کے مساوی ہے اس لئے یہ دونوں محدد دونوں صورتوں میں ایک ہی ہیں، بعض اوقات ایک نقطہ کے محددوں کو عمودی فاصلے تصور کرنا مناسب ہوتا ہے، مثلاً

(۱) مبدأ کے محدد (۰، ۰) ہیں۔

(۲) محور لا پر کے سب نقطوں کا معیّن یعنی ما محدد صفر ہے، مثلاً ل کے محدد (+۹، ۰) ہیں۔

(۳) محور ما پر کے سب نقطوں کا فصلہ یعنی لا محدد صفر ہے، مثلاً م کے محدد (۰، +۷) ہیں۔

۷۔ دفعہ گزشتہ میں ہم نے ہندسی نقطوں کو عددوں کے ذریعہ نامزد کیا، پس اگر سطح مستوی پر کوئی ہندسی نقطہ

ا لیا جائے تو ہم اس کا عددی نام یعنی اس کے محدد معلوم کرسکتے ہیں۔

برعکس اس کے اگر ایک نقطہ کے محدود دئے جائیں تو اس کے ہندسی مقام کا تعین ہو سکتا ہے، مثلاً فرض کرو کہ ایک نقطہ کے محدد (−۳، ۸) یا عام طور پر (لا، ما) معلوم ہیں اور سطح مستوی پر اس کا مقام مطلوب ہے، صورت اوّل میں ہمیں مبدأ سے بائیں جانب محور لا پر فاصلہ کی ۳ اکائیاں کسی پٹڑی یا پیمانہ کی مدد سے ناپنی چاہئیں اور پھر اسی یا کسی اور پیمانہ کے موافق ۸ اکائیاں سیدھے اوپر کی طرف محور ما کے متوازی جانا چاہیئے۔ اس طرح سے نقطۂ مفروضہ کا مقام متعین ہو جائے گا۔ جب نقطہ کے محدد معلوم ہوں تو اس طرح سے اس کے مقام معلوم کرنے کے عمل کو نقطہ کا رسم کرنا یا مرتسم کرنا کہتے ہیں۔ یہ عمل نہایت آسانی سے مربع دار کاغذ کی مدد سے ہو سکتا ہے، مربع دار کاغذ پر متساوی الفصل افقی اور عمودی خط کھنچے ہوئے ہوتے ہیں اور ہر پانچواں یا دسواں خط اور خطوں کی نسبت قدرے جلی ہوتا ہے جس کی وجہ سے ان سمتوں میں فاصلوں کا ناپنا آسان ہو جاتا ہے۔

مربع دار کاغذ کے استعمال سے پیمانہ کی ضرورت نہیں رہتی کیونکہ فی الحقیقت اس کاغذ کے ہر مقام پر پیمانہ مندرج ہوتا ہے۔

مربع دار کاغذ بالعموم دو طرح کا ہوتا ہے، ایک وہ جو انچوں اور انچ کے دسویں حصوں میں تقسیم کیا ہوا ہوتا ہے اور دوسرا وہ جو سنٹی میٹر اور اس کے دسویں حصوں میں منقسم ہوتا ہے، مبتدی کو چاہیئے کہ انچوں والا کاغذ استعمال کرے تاکہ شکلیں درست اور کشادہ ہوں۔

نوٹ ۔ انچوں والے کاغذ میں سب سے چھوٹے خانہ کا ضلع ۱/۱۰ انچ ہے اس ضلع کو بعض اوقات ہم چھوٹا حصہ کہیں گے۔

کچھ عرصہ ہوا کہ یہ کاغذ بہت گراں تھا اور بہت کم لوگ اسے استعمال کرتے تھے اور وہ بھی اہم مسائل کے حل کرنے میں۔ مگر پروفیسر پیری (لندن یونیورسٹی) کی قابل قدر کوششوں نے اس کے دائرہ استعمال کو بہت وسیع کر دیا، اُن کے ہاں ابتدائی ریاضی کی طلبہ اس کو کثرت سے استعمال کرتے ہیں اور اپنے لکچروں اور جوابات کو قریب قریب ایسے ہی کاغذوں پر پر لکھتے ہیں۔

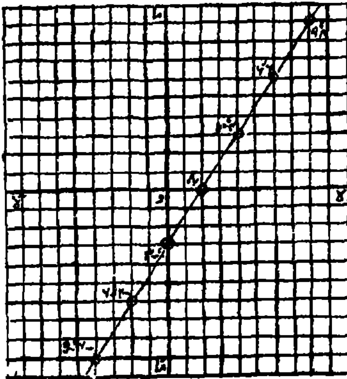
طالب علم کو یہ خیال پیدا نہ ہو کہ ترسیمات اور مربع دار کاغذ کے استعمال کے لئے علم ریاضی کے دقیق مسائل کا جاننا ضروری ہے، تجارت پیشہ لوگ اور دوکاندار اس کاغذ کو بے تکلف استعمال کرتے ہیں اور وہ ریاضی کے گرانمایہ اور مفید مسائل سے چنداں واقف نہیں ہوتے۔

محوروں کے عام استعمال اور مربع دار کاغذ پر نقطے مرتسم کرنے کی چند ابتدائی مثالیں ہم ذیل میں درج کرتے ہیں، کاغذ

پر نقطے رسم کرنے میں طالب علم کو باریک نوکدار سخت پنسل استعمال کرنی چاہیئے، نقطہ کا مقام ظاہر کرنے کے لئے اس کے گرد ایک چھوٹا دائرہ بنا دیا جائے یا عین اس مقام پر ایک چھوٹا چلیپی نشان بنا دیا جا سکتا ہے جس کی شاخوں کا نقطۂ تقاطع ٹھیک مقام مطلوبہ پر منطبق ہو۔

مشق ۱ ۔ شکل کھینچنے سے نقاط (۸، ۹) (۶، ۶) (۴، ۳)، (۲، ۰)، (۰، ۳-)، (۲-، ۶-)، (۴-، ۹-) کے مقام دریافت کرو اور بتاؤ کہ یہ نقطے ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں۔

سب سے پہلے محور لاَ و لا اور ماَ و ما کھینچو۔



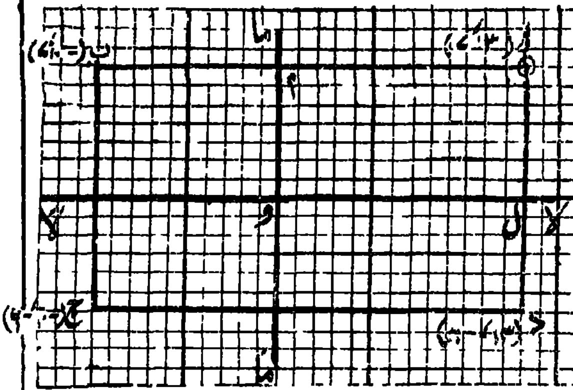
نیز پیمانہ کے لئے فرض کرو کہ دونوں محوروں پر طول کی اکائی چھوٹے مربع کے ایک ضلع سے (یعنی چھوٹے حصہ) سے تعبیر ہوتی ہے، اس شکل میں جو کاغذ استعمال کیا گیا ہے اس میں ایک انچ دس مساوی حصوں میں منقسم ہے، اس لئے شکل کا پیمانہ ہوگا $\frac{1}{10}$ انچ = ۱ یعنی ($\frac{1}{10}'' = 1$)

اب نقطہ (۶، ۶) کا مقام معلوم کرنے کے لئے ۶ اکائیاں یعنی ۶ چھوٹے حصے محور لا پر دائیں جانب اور ۶ چھوٹے حصے اوپر کی طرف محور ما کے متوازی لو، اور اس

مقام کو ظاہر کرنے کے لئے اس کے گرد ایک چھوٹا دائرہ بنا دو۔
(۲، ۰) کا مقام معلوم کرنے کے لئے ۲ چھوٹے حصے دائیں جانب محور لا پر لو اور بس کیونکہ اس کا معین صفر ہے، ہم جانتے ہیں کہ محور لا پر کے سب نقاط کے ما محدد یعنی معین صفر ہوتے ہیں۔
اسی طرح (۰، -۳) کا مقام معلوم کرنے کے لئے مبدأ سے محور لا پر دائیں جانب جانے کی ضرورت نہیں کیونکہ اس نقطہ کا فصلہ صفر ہے، لیکن مبدأ سے ۳ چھوٹے حصے محور ما پر نیچے کی طرف جانا ہوگا۔ یہ نقطہ محور ما پر واقع ہے اس لئے اس کا فصلہ صفر ہے، باقی نقاط کے مقامات کا تعین بھی اسی طرح ہو سکتا ہے۔
مثلاً (-۲، -۶) کے لئے ۲ حصے بائیں جانب اور ۶ نیچے کی طرف اور (-۳، -۹) کے لئے ۳ بائیں طرف اور ۹ نیچے جانا ہوگا۔
ان سب نقطوں کے مقامات کے گرد چھوٹے چھوٹے دائرے بنا دئے گئے ہیں اور ان مقامات پر ایک کالے تاگے کو تان کر ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ سب کے سب قریب قریب ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں۔
شکل میں ایک سیدھی پٹری سے وہ مستقیم خط کھینچا گیا ہے جو قریب قریب ان نقطوں میں سے گزرتا ہے۔
مشق ۲۔ نقاط ا (۳، ۷)، ب (-۱۰، ۷)، ج (-۱، -۶)، د (۳، -۶) کو مربع دار کاغذ پر مرتسم کرو اور ذوار بعۃ الاضلاع ا ب ج د کے اضلاع کا طول اور رقبہ دریافت کرو۔
دونوں محوروں کی سمتوں میں طول کی اکائی کو چھوٹے مربع

کے ضلع سے تعبیر کرو ($\frac{1}{10}$″ = ۱)۔

ا (۱۳، ۷) کو مرتسم کرنے کے لئے ۱۳ اکائیاں (چھوٹے حصے) دائیں جانب اور ۷ اوپر کی طرف لو۔ اور اس مقام کے گرد ایک چھوٹا دائرہ کھینچ دو۔



ب (-۱۰، ۷) کو مرتسم کرنے کے لئے ۱۰ حصے بائیں طرف اور ۷ اوپر کیطرف لو

ج (-۱۰، -۶) 〃 〃 ۱۰ 〃 〃 ۶ نیچے کیطرف لو

د (۱۳، -۶) 〃 〃 ۱۳ 〃 دائیں طرف ۶ نیچے کیطرف لو

ا ب، ب ج، ج د، د ا کو ملاؤ، ظاہر ہے کہ ا ب ج د ایک مستطیل ہے۔

جس میں ب ا = ب م + م ا = -(-۱۰) + ۱۳ = ۲۳ جس کی تصدیق خانے گننے سے ہو سکتی ہے۔

اور د ا = د ل + ل ا = -(-۶) + ۷ = ۱۳

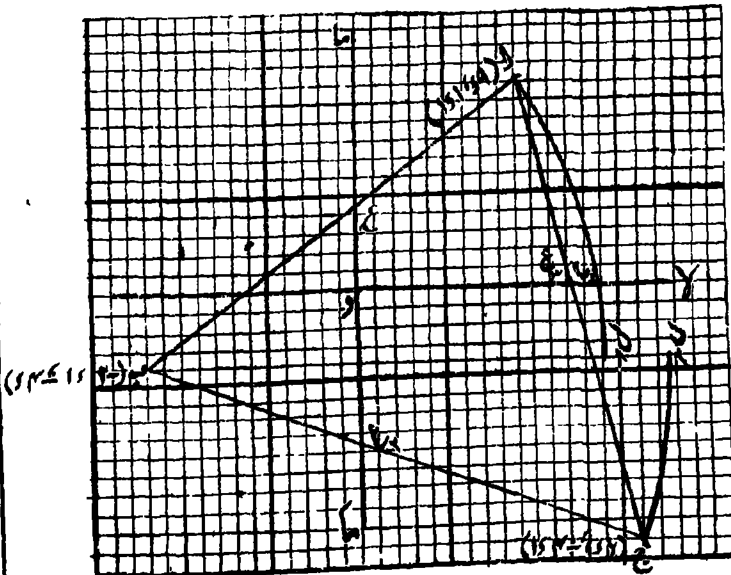
پس اضلاع کے طول بالترتیب ۲۳ اور ۱۳ اکائیاں ہیں اور اکائی چھوٹے حصہ یعنی $\frac{1}{10}$ انچ کے مساوی ہے اس لئے اضلاع کے طول بالترتیب ۲٫۳ انچ اور ۱٫۳ انچ ہیں۔

افقی خط مستطیل کو ۱۳ ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ایسے ہر ٹکڑے

میں ۲۳ چھوٹے مربعے ہیں، اس لئے مستطیل ا ب ج د میں
چھوٹے مربعوں کی کل تعداد ۲۳ × ۱۳ = ۲۹۹ ہوگی یعنی ا ب ج د
کا رقبہ ایک چھوٹے مربع کے رقبہ کا ۲۹۹ گنا ہے۔

چونکہ چھوٹے مربع کا رقبہ = $\frac{۱}{۱۰}$ × $\frac{۱}{۱۰}$ = $\frac{۱}{۱۰۰}$ مربع انچ
اسلئے ا ب ج د کا رقبہ = ۲۹۹ × $\frac{۱}{۱۰۰}$ = ۲ء۹۹ مربع انچ

مشق ۳۔ ایک مثلث کے راس بالترتیب ا (۹ء، ۱ء)، ب (-۲ء۱، -۴ء)، ج (۶ء۱، -۴ء۱) ہیں، اس کو بناؤ اور جن نقطوں پر اس کے اضلاع محوروں سے ملتے ہیں ان کے محدد معلوم کرو، نیز اس مثلث کا رقبہ اور اس کے اضلاع کے طول معلوم کرو۔



اس مثال میں مشق ۲ کی نسبت فاصلہ ناپنے کی بڑی اکائی منتخب

کرنی چاہیئے، فرض کرو کہ دونوں محوروں پر اکائی ایک انچ سے تعبیر ہوتی ہے، اس صورت میں چھوٹا حصہ اکائی کے ۱/۱۰ یعنی ۱ء کو تعبیر کرے گا۔ ا کو مرتسم کرنے کے لئے ۹ چھوٹے حصے دائیں طرف اور ۱۱ حصے اوپر کی طرف جانا ہوگا کیونکہ ایک چھوٹا حصہ ۱ء کو تعبیر کرتا ہے۔

اسی طرح ب (-۲ء۱، -۴ء) کے لئے ۱۲ حصے بائیں طرف اور ۴ حصے نیچے جانا ہوگا

اور ج (۱ء۶، -۱ء۴) " ۱۶ " دائیں " " ۱۴ " نیچے "

ضلع ا ب محور ما مَا کو ع پر قطع کرتا ہے، اب ع مبدأ سے چوتھے اور پانچویں افقی خطوط کے درمیان واقع ہے یعنی فاصلہ و ع ۴ء اور ۵ء کے درمیان ہے۔ اگر اس چھوٹے حصے کو جس میں ع واقع ہے دس مساوی حصوں میں تقسیم ہوا ہوا خیال کریں تو ایسا ہر ایک حصہ ۱/۱۰۰ یعنی ۰۱ء کے مساوی ہوگا، ایسے پانچ حصے ۰۵ء کے مساوی ہونگے وغیرہ وغیرہ، اب نقطہ ع خطوط مذکورہ کے درمیان کے نقطہ سے کچھ نیچے ہے، اسلئے جہاں تک ہم دیکھ سکتے ہیں

و ع = ۴۳ء گویا ع کے محدد (۰، ۴۳ء) ہیں کیونکہ یہ نقطہ محور ما پر مبدأ سے اوپر کی جانب واقع ہے۔

اسی طرح ب ج اور محور ما مَا کے نقطہ تقاطع ع۲ کے محدد قریب قریب (۰، -۸۶ء) ہیں

اور ج ا اور محور لا لَا کے نقطہ تقاطع ع۳ کے محدد قریب قریب (۲۱ء۱، ۰) ہیں۔

رقبہ دریافت کرنے کے لئے مثلث کے اندر چھوٹے مربعوں کی تعداد معلوم کرو، اور ایسا کرنے میں چھوٹے مربع کی کسروں کو بھی

ملحوظ رکھو، جو نصف کے برابر یا نصف سے زیادہ ہوں ان کو پورا مربع شمار کرو اور جو نصف سے کم ہوں ان کو نظر انداز کر دو۔

مثلث ا ب ج میں چھوٹے مربعوں کی کل تعداد ۳۱۵ ہے، اور چھوٹے مربع کا رقبہ ۱ء × ۱ء = ۰۱ء مربع اکائیاں، اسلئے مثلث ا ب ج کا رقبہ = ۳ء۱۵ مربع اکائیاں یا مربع انچ۔

ا ب کا طول معلوم کرنے کے لئے ب کو مرکز اور ب ا کو نصف قطر مان کر پرکار سے ایک دائرہ کی قوس کھینچو جو ب میں سے گزرنے والے افقی خط کو ل₁ پر ملے، تب ب ا = ب ل₁ = ۲۶ چھوٹے حصے = ۲ء۶ اکائیاں، اسی طرح ب کو مرکز اور ب ج کے نصف قطر پر دائرہ کھینچو جو افقی خط سے ل₂ پر ملے، تب ب ج = ب ل₂ = ۲۹ء۸ چھوٹے حصے = ۲ء۹۸ اکائیاں، اسی طرح ج ا کا طول معلوم ہو سکتا ہے، پیمانہ سے ناپ کر ان نتائج کی تصدیق کرو۔

اگلی دفعہ میں ہم نظری طریق پر ایسے دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کرینگے جن کے محدد معلوم ہوں۔



امثلہ نمبری ۲

۱۔ اگلے صفحہ کی شکل میں

(ا) ایک انچ کے دسویں حصہ کو

(ب) ایک انچ کو

(ج) ایک انچ کے نصف کو

طول کی اکائی مان کر نقاط ن₁، ن₂، ن₃ ..... ن₉ کے محدد معلوم کرو

۲ ـ خطوط ن$_۱$ن$_۵$، ن$_۲$ن$_۷$، ن$_۳$ن$_۹$، ن$_۸$ن$_۶$، ن$_۴$ن$_۱$ کے سروں پر جو نقطے ہیں ان کے محدد معلوم کرو۔ پیمانہ ($\frac{۱}{۱۰}$″ = ۱)

۳ ـ مثلث ن$_۱$ن$_۴$ن$_۲$، ن$_۳$ن$_۶$ن$_۷$، ن$_{۱۰}$ن$_۸$ن$_۹$، ن$_۵$ن$_۷$ن$_۹$ کے راسوں کے محدد معلوم کرو۔ پیمانہ (۱″ = ۱)

۴ ـ نقاط ذیل کے شکل پر نشان دو۔

(۱) (۰، ۰)، (۷، ۰)، (-۷، ۰)، (۰، ۷)، (۰، -۷)

(۲) (۹، ۹)، (۱۶، ۱۶)، (-۹، -۹)، (-۱۶، -۱۶)

(۳) (۷، ۱۱)، (-۷، ۱۱)، (-۷، -۱۱)، (۷، -۱۱)

پیمانہ ($\frac{۱}{۱۰}$″ = ۱)

۵ = نقاط ذیل کو مرتسم کرو

(۱) (۲٫۳، ۱٫۵)، (۲٫۶۳، ۱٫۵۸)، ($\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$)، (۱$\frac{۵}{۶}$، ۲$\frac{۳}{۴}$)

(۲) (−۲٫۴، ۱٫۳)، (−۱٫۵۷، ٫۵۷)، (−۲٫۳۰، ۱٫۰۴)

(۳) (−٫۸۸، −٫۷۱)، (−۲٫۳۲، −۱٫۵۴)، (۲٫۳۲، −٫۸۷)

پیمانہ۔ اکائی کو ایک انچ سے تعبیر کرو (۱″ = ۱)

۶۔ ثابت کرو کہ ذیل کی ہر صورت میں جن نقطوں کے محدد دیے گئے ہیں وہ نقطے ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں۔

(۱) (۳، ۰)، (۵، ۱)، (−۱، −۲)، (−۳، −۳)

(۲) (۰، −۲)، (−۲، ۰)، (−۴، ۲)، (۱، −۳)

(۳) (۰، ۲)، (۴، ۲)، (−۲، ۲)

(۴) (۰، ۳)، (۱، ۰)، (۲، −۳)

۷۔ جہاں ذیل کے نقطوں کو ملانے والے خط (ممدودہ بشرط ضرورت) محاور لاَ و لا اور ماَ و ما سے ملتے ہیں ان نقطوں کے محدد معلوم کرو۔

(ا) (۴، ۳)، (−۳، −۲) (ب) (۱، −۴)، (−۲، ۴)

(ج) (−۲، −۲)، (۳، ۵)

۸۔ ذیل کی ہر ایک صورت میں چاروں نقطوں کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ یہ نقطے ایک مستطیل کے راس ہیں، نیز ہر صورت میں مستطیل کے اضلاع کے طول اور اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(۱) (۲۲، ۵)، (−۹، ۵)، (−۹، ۱۴)، (۲۲، ۱۴)

(۲) (−۲، ۶)، (−۱۴، ۶)، (−۱۴، −۱۶)، (−۲، −۱۶)

پیمانہ $\frac{1}{10}$ انچ = ۱

۹۔ ذیل کی ہر صورت میں نقطوں کو مرتسم کرو اور ان کو ملانے

سے جو مثلث بنیں ان کے رقبے دریافت کرو۔

(۱) (۰، ۰)، (۲۰، ۰)، (۲۰، ۲۰)

(۲) (۱۶، ۸)، (-۱۳، ۸)، (-۱۳، -۵)

(۳) (۱۶، ۱۲)، (-۱۰، ۰)، (۱۶، -۱۲)

پیمانہ $\frac{۱}{۱۰}$ انچ = ۱

۱۰ — ذیل کی ہر صورت میں نقطوں کو ملانے سے جو مثلث بنیں ان کے رقبے دریافت کرو۔

(۱) (۰، ۰)، (-۲٫۳، ۰٫۸)، (-۲٫۳، -۱٫۴)

(۲) (۰٫۶، ۰٫۴)، (۲٫۸، ۱٫۳)، (۱٫۳، ۲٫۴)

(۳) (۱٫۶، ۱٫۲)، (-۱، ۲٫۳)، (-۰٫۴، -۱)

(۴) (۲٫۴، -۱٫۸)، (-۲٫۶، ۲٫۳)، (-۱، -۱٫۴)

۱۱ — ذیل کی ہر صورت میں چار نقطوں کو ملانے سے جو ذو اربعۃ الاضلاع بنے اس کے اضلاع کے طول اور رقبہ دریافت کرو۔ پیمانہ ۱ انچ = ۱

(۱) (۳٫۵، ۲)، (۱٫۵، ۲)، (۱٫۵، -۱)، (۳٫۵، -۱)

(۲) (۲٫۷، ۳)، (۰٫۴، ۳)، (۰٫۴، -۱٫۲)، (۲٫۷، -۱٫۲)

(۳) (۱٫۸، ۱٫۳)، (-۲٫۴، ۱٫۳)، (-۲٫۴، -۰٫۷)، (۱٫۸، -۰٫۷)

(۴) ($۲\frac{۳}{۴}$، $۱\frac{۱}{۲}$)، (-$۳\frac{۱}{۴}$، $۱\frac{۱}{۲}$)، (-$۳\frac{۱}{۴}$، -$۲\frac{۱}{۲}$)، ($۲\frac{۳}{۴}$، -$۲\frac{۱}{۲}$)

(۵) (۱٫۲۴، ۲٫۶۲)، (۰، ۲٫۶۲)، (۰، ۰)، (۱٫۲۴، ۰)

(۶) (۱٫۸۶، ۲٫۲۷)، (-۲٫۱۴، ۲٫۲۷)، (-۲٫۱۴، -۱٫۴۵)، (۱٫۸۶، -۱٫۴۵)

۱۲ — ذیل کی چار صورتوں میں نقاط ا، ب، ج، د کے محدد دیئے

گئے ہیں، خطوط ا ج، ب د کے نقطۂ تقاطع کے محدد معلوم کرو اور ہر صورت میں ذوارابعۃ الاضلاع ا ب ج د کا رقبہ دریافت کرو۔

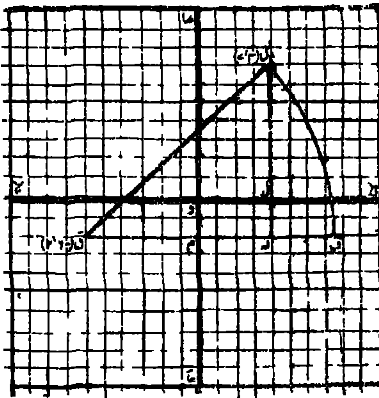
(۱) ا (۲، ۱)، ب (-۲، ۲)، ج (-۱، -۱)، د (۳، -۱)

(۲) ا (۱٫۷، ۲٫۳)، ب (-۱٫۸، ۱٫۳)، ج (-۱٫۶، -۱٫۵)، د (۲٫۱، ۰٫۳)

(۳) ا ($۲\frac{1}{2}$، $۱\frac{1}{3}$)، ب (۲، $-\frac{3}{5}$)، ج ($-۱\frac{1}{4}$، $-۱\frac{2}{3}$)، د (-۱، $۱\frac{3}{4}$)

(۴) ا (۳٫۸، ۲٫۳)، ب (۰٫۴، ۱٫۶)، ج (-۳٫۱، -۲٫۲)، د (۲٫۴، -۱٫۷)

۸ — ایک مستقیم خط نقاط ن (۴، ۷)، ق (-۶، -۲) کو ملاتا ہے، اس کا طول معلوم کرو۔



فاصلہ ن ق کی تقریبی قیمت اس طرح معلوم ہو سکتی ہے، نقطوں کو مرتسم کرنے کے بعد ق کو مرکز مان کر ق ن کے نصف قطر پر دائرہ کھینچو جو ق میں سے گزرنے والے افقی خط سے ف پر ملے، ق ف = ۱۳٫۴ اکائیاں تقریباً

جن دو نقطوں کے محدد دیے ہوئے ہوں ان کا باہمی

فاصلہ اُن محددوں کی رقوم میں نظری طریق پر بھی معلوم ہوسکتا ہے،

ن سے محور صا کے متوازی اور ق سے محور لا کے متوازی خطوط ن ر، ق ر کھینچو جو ایک دوسرے کو ر پر قطع کریں،
اب ن ق ر ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جس کے اضلاع کے مطلق طولوں میں یہ ربط ہے ۔

ق ن^2 = ق ر^2 + ر ن^2

لیکن ق ر = م ل + ق م = ۴ - (-۶) = فصلہ ن - فصلہ ق
ر ن = ل ن + ر ل = ۷ - (-۲) = معین ن - معین ق

∴ ق ن^2 = (فصلہ ن - فصلہ ق)^2 + (معین ن - معین ق)^2

= {+۴ - (-۶)}^{2} + {+۷ - (-۲)}^{2} = ۱۰^2 + ۹^2 = ۱۸۱

∴ ق ن = √۱۸۱ = ... ۱۳٫۴۵

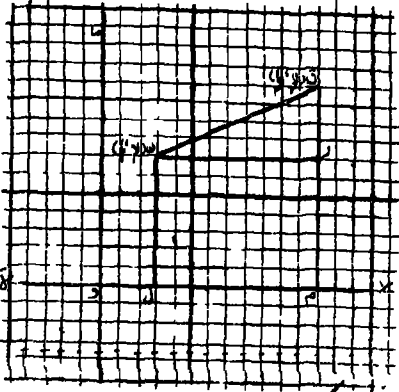
اور پیمائش سے = ... ۱۳٫

ہم نے اوپر دیکھا کہ اگر نقاط ن اور ق کے محدد معلوم ہوں تو
فاصلہ ن ق^2 = (فصلہ ن - فصلہ ق)^2 + (معین ن - معین ق)^2

یعنی فاصلہ ن ق = √{(فصلہ ن - فصلہ ق)^2 + (معین ن - معین ق)^2}

عام صورت میں محددوں کو جبریہ حرفوں سے تعبیر کرکے ہم اس ضابطہ کو اگلی دفعہ میں ثابت کرینگے ۔

۹ — دو نقطوں کا باہمی فاصلہ اُن کے محددوں کی رقوم میں معلوم کرو۔



فرض کرو کہ مفروضہ نقطے ن $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$ اور ق $(\text{لا}_2, \text{ما}_2)$ ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ محددوں کی رقوم میں مطلوب ہے، لاَ لا پر عمود ن ل اور ق م کھینچو اور نقطہ ن سے ن ر محور لا کے متوازی کھینچو جو ق م سے ر پر ملے۔

تب $\text{ن ق}^2 = \text{ن ر}^2 + \text{ر ق}^2$

اب $\text{ن ر} = \text{ل م} = \text{و م} - \text{و ل} = \text{لا}_2 - \text{لا}_1$

جو (فصلہ ق - فصلہ ن) کے مساوی ہے۔

اور $\text{ر ق} = \text{م ق} - \text{م ر} = \text{م ق} - \text{ل ن} = \text{ما}_2 - \text{ما}_1$

جو (معیّن ق - معیّن ن) کے مساوی ہے

ن ر اور ر ق کو تعبیر کرنے والے جملے $\text{لا}_2 - \text{لا}_1$ اور $\text{ما}_2 - \text{ما}_1$ ہر حالت میں یہی رہیں گے خواہ ن اور ق بلحاظ ایک دوسرے کے کہیں واقع ہوں۔

اس لئے $\text{ن ق}^2 = (\text{لا}_2 - \text{لا}_1)^2 + (\text{ما}_2 - \text{ما}_1)^2$

یعنی $\text{ن ق} = \sqrt{(\text{لا}_2 - \text{لا}_1)^2 + (\text{ما}_2 - \text{ما}_1)^2}$

یا $\text{ن ق} = \sqrt{(\text{فصلہ ق} - \text{فصلہ ن})^2 + (\text{معین ق} - \text{معین ن})^2}$

فرع۔ اگر ن مبدأ پر منطبق ہو یعنی $لا_۱ = ۰$ اور $ما_۱ = ۰$

$$\text{تو } و ق = \sqrt{لا_۲^۲ + ما_۲^۲}$$

مشق ۱۔ نقاط ا (۲٫۵، ۱) اور ب (-۱، ۱٫۵) کا فاصلہ معلوم کرو۔

$$ا ب^۲ = (لا_۲ - لا_۱)^۲ + (ما_۲ - ما_۱)^۲$$

$$= (-۱-۲٫۵)^۲ + (۱٫۵ - ۱)^۲$$

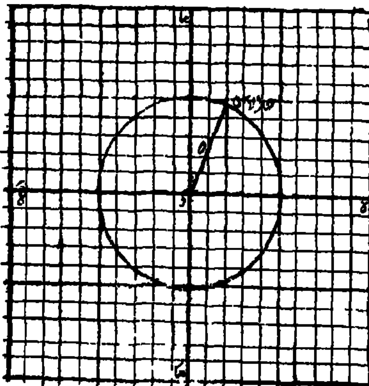
$$= ۱۲٫۲۵ + ٫۲۵$$

$$= ۱۲٫۵۰$$

$$\text{اس لئے } ا ب = \sqrt{۱۲٫۵۰} = ... ۳٫۵۳۵$$

طالب علم کو چاہیئے کہ اِن نقطوں کو مربع دار کاغذ پر مرتسم کرے اور پیمائش سے اس نتیجہ کی تصدیق کرے۔

مشق ۲۔ ایک نقطہ (لا، ما) ایک ایسے دائرہ پر حرکت کرتا ہے جس کا مرکز مبدأ ہے اور جسکا نصف قطر ۵ ہے، (لا، ما) کا باہمی ربط دریافت کرو۔



نقطہ ن دائرہ کے محیط پر خواہ کہیں واقع ہو اس کا فاصلہ مبدأ و (۰، ۰) سے ہمیشہ ۵ کے مساوی ہوگا۔

اب فاصلہ و ن = $\sqrt{(لا - ۰)^۲ + (ما - ۰)^۲}$ = ۵

یعنی $لا^۲ + ما^۲ = ۵^۲ = ۲۵$ - (۱)

پس (۱) لازمی شرط ہے کہ نقطہ (لا، ما) دائرہ مفروضہ کے محیط پر واقع ہو -

ربط (۱) ایک دوسرے درجہ کی مساوات ہے جہاں نقطہ کے محدد لا اور ما دو مجہول مقداریں ہیں اور ظاہر ہے کہ محیطِ دائرہ کے ہر نقطے کے محدد اس مساوات کو پورا کرتے ہیں، اس لحاظ سے ربط (۱) کو ہم اس دائرہ کی مساوات کہہ سکتے ہیں -

امثلہ نمبری ۳

۱ - جن نقطوں کے زوج ذیل میں مندرج ہیں ان کے باہمی فاصلے دریافت کرو-

(۱) (۰، ۰)، (۵، ۰) (۲) (۰، ۰)، (۳، ۴)

(۳) (۰، ۰)، (-۴، ۳) (۴) (۰، ۰)، (-۳، -۴)

(۵) (۰، ۰)، (+۴، -۳)

نیز ثابت کرو کہ یہ سب نقطے ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوئے ہیں

۲ - ذیل کی ہر ایک صورت میں نقطوں کے جو زوج دے گئے ہیں ان کے باہمی فاصلے دریافت کرو-

(۱) (۹ء۱، ۳ء۲)، (۳ء۲، ۶ء۱)

(۲) (-۳ء۱، ۱ء۲)، (۱ء۲، ۳ء۱)

(۳) (-۵ء۲، -۲ء۱)، (۵ء۲، -۲ء۳)

(۴) (۳ و ۴ ، − ۴ و ۲) ، (− ۴ و ۳ ، − ۴ و ۲)

۳ ـ ثابت کرو کہ نقاطِ ذیل ایک ایسے دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں جس کا مرکز (۶ ، ۷) ہے اور جس کا نصف قطر ۵ ہے۔

(۱۱ ، ۷) ، (۱۰ ، ۱۰) ، (۹ ، ۱۱) ، (۳ ، ۱۱) ، (۲ ، ۴) ، (۶ ، ۲)

۴ ـ نقاط (۱۳ ، ۰) ، (۰ ، −۱۳) ، (۱۲ ، ۵) ، (−۱۲ ، ۵) ، (−۱۳ ، ۰) (−۵ ، −۱۲) ، (۵ ، −۱۲) کو مرتسم کرو اور دکھاؤ کہ یہ سب کے سب ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں، دائرہ کا مرکز اور نصف قطر دریافت کرو۔

۵ ـ نقاط (۳ ، ۶) اور (−۵ ، ۲) سے نقطہ (۱۰ ، −۱۸) کے فاصلے دریافت کرو اور ثابت کرو کہ یہ فاصلے ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

۶ ـ ایک جہاز کا مقام ایک روشنی گھر سے ۸ میل شمال اور ۶ میل مشرق کی طرف ہے اور ایک دوسرے جہاز کا مقام اُسی روشنی گھر سے ۳ میل شمال اور چھ میل مغرب کی طرف ہے، دونوں جہازوں کا باہمی فاصلہ دریافت کرو اور نیز معلوم کرو کہ پہلا جہاز روشنی گھر سے کتنی دور ہے۔

۷ ـ ایک نقطہ (لا ، ما) ایک ایسے دائرہ کے محیط پر حرکت کرتا ہے جس کے مرکز اور نصف قطر ذیل میں مندرج ہیں۔

(۱) مرکز (۳ ، ۴) ، نصف قطر ۵

(۲) مرکز (−۵ ، −۳) ، نصف قطر ۷

(۳) مرکز (۰ ، ۰) ، نصف قطر ل

(۴) مرکز (ا ، ب) ، نصف قطر ر

ہر صورت میں لا ، ما کا باہمی ربط دریافت کرو۔

باب دوم

خطی مساوات کی ترسیم

۱۰ - تفاعیل - ہم جانتے ہیں کہ ۲ لا + ۳ ایک جملہ درجۂ اول ہے جس میں صرف ایک جبریہ حرف لا شامل ہے اور باقی دو معلوم ہندسے ہیں۔

اس جملہ کی قیمت متعیّن نہیں ہو سکتی جب تک لا کی قیمت معلوم نہ ہو۔ اگر لا کی کوئی قیمت فرض کر لی جائے تو جملہ کی قیمت فوراً متعیّن ہو جاتی ہے۔ پس لا کے بدلنے یا مختلف قیمتیں اختیار کرنے سے یہ جملہ بھی مختلف قیمتیں اختیار کرتا ہے، مثلاً اگر ابتداً لا = ۲،۵ تو جملہ ۲ لا + ۳ = ۸، پھر اگر لا بدل کر ۳ ہو جائے تو جملہ بدل کر ۹ ہو جاتا ہے۔ اسی طرح اگر لا مسلسل بدلتا جائے اور یہ قیمتیں

........، -۳، -۲، -۱، ۰، ۱، ۲، ۳، .... سلسلہ وار اختیار کرے تو جملہ ۲ لا + ۳ بھی بدلیگا اور لا کی ان قیمتوں کے جواب میں حسب ذیل قیمتیں

........، -۳، -۱، ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ....

اختیار کرے گا۔

اس عمل میں لا اور ۲ لا + ۳ دونوں بدلتے ہیں یعنی متغیر ہیں، باقی ۲، ۳ معلوم ہندسے ہیں وہ نہیں بدلتے ان کو اس لحاظ سے مستقل مقداریں کہتے ہیں۔

اب لا متغیر ہے اور ۲ لا + ۳ بھی، لیکن اگر ہم لا کو کوئی خاص قیمت دیں تو ۲ لا + ۳ کی قیمت فوراً متعین ہوجاتی ہے یعنی ۲ لا + ۳ کی قیمت لا کے تابع ہے، اسلئے ۲ لا + ۳ کو متغیر تابع کہتے ہیں اور لا کو متغیر متبوع۔ برعکس اس کے اگر ہم ۲ لا + ۳ کی قیمت پہلے مخصوص کرلیں تو لا کی قیمت مقرر ہوجائے گی، اس صورت میں تابع اور متبوع کا تعلق الٹ جائیگا۔ یہ صرف سہولت پر مبنی ہے کہ کس متغیر کو تابع مانا جائے اور کس کو متبوع۔ ظاہر ہے کہ موجودہ صورت میں اگر لا کو متغیر متبوع مانا جائے تو اس میں سہولت ہے۔

اوپر ہم نے ۲ لا + ۳ کو جملہ کہا ہے، اسلئے کہ طالب علم اس سے زیادہ مانوس ہوگا، لیکن جب متغیر مقداروں سے بحث ہو اور کسی جملہ اور اس کے متغیرات کی قیمتوں کا باہمی انحصار پیش نظر ہو تو ریاضی داں ۲ لا + ۳ کو "ایک ایسا جملہ جس میں لا شامل ہے" نہیں کہتے بلکہ اختصاراً اور دستوراً اس کو "فنکشن لا" یعنی لا کا تفاعل کہتے ہیں۔

جملہ مظہراتِ دنیا میں تبدیلی اور تغیر ہر طرف رونما ہے، جس دن سے تغیراتِ عالم کے متعلق فنِ ریاضی کے قوانین منضبط ہونا شروع ہوئے اُس دن جدید ریاضی کی ابتدا ہوئی۔ تفاعل اور

اور متغیر آج کل ریاضی کے ہر رگ و ریشہ میں بستہ اور پیوستہ ہیں

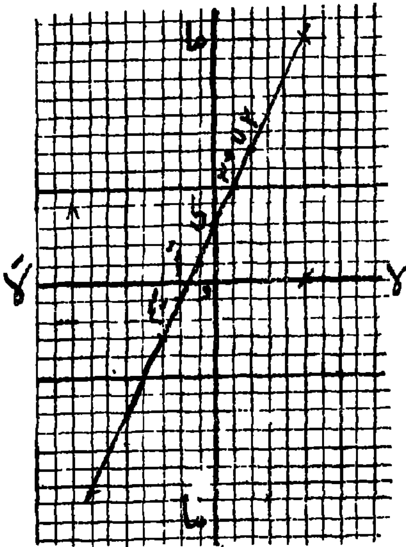
تعریف - اگر ایک جملہ میں متغیر مقدار لا شامل ہو اور اس جملہ کی قیمت لا پر منحصر ہو تو اس کو لا کا **تفاعل** کہتے ہیں۔

مثلاً ۲ لا + ۳، $\frac{\text{۲ لا + ۴}}{\text{۳}}$، ۵ لا + ۸ وغیرہ میں سے ہر ایک لا کا تفاعل درجہ اول ہے، اسی طرح ۲ لا^{۲} + ۳ لا + ۴، لا^{۳} - ۵ لا + ۹، ۳ لا^{۴} - ۵ لا^{۳} + ۴ لا - ۷ وغیرہ بالترتیب لا کے تفاعل درجہ دوم، سوم، چہارم ہیں۔ یاد رہے کہ متغیر کی بڑی سے بڑی قوت تفاعل کے درجہ کو ظاہر کرتی ہے۔

لا کے کسی تفاعل کو اختصار کی خاطر ف (لا) سے موسوم کرتے ہیں اور اس کو پڑھتے ہیں "فے لا"۔ مثلاً ف (لا) = ۲ لا + ۳، یا ف (لا) = لا^{۲} + ۲ لا + ۵ وغیرہ وغیرہ جس سے یہ زیادہ واضح طور پر معلوم ہوتا ہے کہ تفاعیل مذکورہ متغیر ہیں اور اُن کی قیمتیں لا پر موقوف ہیں اور صرف اسی پر۔

تفاعل کی ترسیم - ہم جانتے ہیں کہ تفاعل درجہ اول ۲ لا + ۳ کی قیمت لا پر منحصر ہے اور لا کو بتدریج عددی قیمتیں دینے سے ۲ لا + ۳ کی متناظر قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں۔ ان میں سے چند جدول ذیل میں مندرج ہیں۔ طالب علم اس جدول کی توسیع جس قدر چاہے کر سکتا ہے۔

لا =	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	....
تفاعل ۲ لا + ۳ =	-۳	-۱	+۱	۳	۵	۷	....



(پیمانہ ایک چھوٹا حصہ = اکائی)

ان میں سے لا کی کسی ایک قیمت مثلاً -۱، کو فصلہ اور تفاعل کی متناظر قیمت + ۱، کو معین مان کر کسی مستوی سطح پر ایک نقطہ مرتسم کرو۔ اس طرح سے لا اور ۲ لا + ۳ کی متناظر قیمتوں کے مختلف زوجوں سے سطح مستوی پر بے شمار نقطے حاصل ہوتے ہیں جن میں سے چند شکل بالا میں دکھائے گئے ہیں۔ ان بے شمار نقطوں کو ملانے والا خط تفاعل ۲ لا + ۳ کی ترسیم کہلاتا ہے۔

جدول بالا میں اگر لا کی قیمتیں ایک دوسرے کے بالکل قریب قریب لی جائیں تو طالب علم اس کی تصدیق کر سکتا ہے کہ سطح مستوی پر جو نقطے ان کے جواب میں حاصل ہونگے وہ ایک دوسرے کے نہایت قریب قریب واقع ہونگے اور ترسیم مطلوبہ مسلسل ہوگی۔

۱۱۔ **مساواتیں**۔ دو جبریہ جملوں کے باہم مساوی ہونے سے جبریہ مساوات پیدا ہوتی ہے، عام طور پر ان جملوں کی تمام رقموں کو ایک طرف منتقل کر دیتے ہیں اور علامت تساوی

کے دوسری طرف صفرہ جاتا ہے مثلاً ۳ لا + ۲ = ۰ اور
۲ لا۲ + ۳ لا + ۴ = ۰ وغیرہ وغیرہ ان مساواتوں میں ۲، ۳، ۴
وغیرہ معلوم مقداریں ہیں اور لا، ما وغیرہ کو مجہول مقداریں کہتے ہیں یہ
مجہول مقداریں طبیعی یا ہندسی مقادیر ہو سکتی ہیں مثلاً طول،
حجم، تپش، دباؤ، نقطہ کے محدد وغیرہ وغیرہ۔
مثلاً فرض کرو کہ ایک میز کے طول کا ۵ گنا ۸ فٹ ہے

تو ۵ × میز کا طول = ۸ فٹ

یعنی میز کا طول = ۸/۵ فٹ

اگر اختصار کی خاطر میز کے طول کی جگہ ہم کوئی جبریہ حرف لا لکھیں
تو یہ مساوات ہو جائے گی ۵ لا = ۸ فٹ یعنی لا = ۸/۵ فٹ

نوٹ ۔ طالب علم دیکھ سکتا ہے کہ ابھی لا مجہول مقدار تھی اور ابھی
یہ معلوم مقداروں کی رقوم میں معلوم ہو گئی۔

مجہول مقدار مساوات کے درجہ اور مرتبہ کو ظاہر کرتی ہے
مساوات درجہ اول میں مجہول مقدار کی بڑی سے بڑی
قوت ایک ہوتی ہے، مثلاً ایک مجہول مقدار کی مساوات
درجہ اول ۲ لا + ۳ = ۰ ہے اور دو مجہول مقداروں کی مساوات
درجہ اول ۳ لا + ۴ ما + ۵ = ۰ ہے۔ اسی طرح سے ایک
مجہول مقدار کی مساوات درجہ دوم ۲ لا۲ + ۳ لا + ۴ = ۰
ہے وغیرہ وغیرہ۔

مساوات کے حل سے یہ مراد ہے کہ مجہول مقداروں کی
قیمت معلوم مقداروں کی رقوم میں دریافت کی جائے اور

یہ قیمت ایسی ہو کہ مساوات میں مجہول مقدار کی جگہ اس کو مندرج کرنے سے طرفین مساوات برابر ہو جائیں (یعنی مساوات پوری ہو جائے)

اب مساوات درجہ اول ۲ لا + ۳ = ۰ کو حل کرنے سے لا = - ۳/۲ ، اس مساوات میں اگر لا کی بجائے - ۳/۲ لکھا جائے {۲ × (- ۳/۲) + ۳ = ۰} تو مساوات پوری ہو جاتی ہے اور ظاہر ہے کہ سوائے - ۳/۲ کے اگر کوئی اور عدد لا کی بجائے مساوات میں رکھا جائے تو مساوات پوری نہیں ہوتی، اس کو بعض اوقات مساوات کی **اصل** کہتے ہیں۔

اب مساوات ۲ لا + ۳ ما + ۴ = ۰ کو لو، اس میں دو مجہول مقداریں لا اور ما شامل ہیں اور مجہول مقدار کی بڑی سے بڑی قوت اس میں ایک ہے، آئندہ ہم اس کو دو مجہول مقداروں کی مساوات درجہ اول یا مختصراً **خطی مساوات** کہیں گے، آخرالذکر نام کی وجہ تسمیہ آگے چلکر معلوم ہوگی۔ اس مساوات کے حل سے یہ مراد ہوگی کہ مجہول مقادیر لا، ما کی قیمتیں معلوم مقداروں کی رقوم میں دریافت کی جائیں اور پھر اگر ان قیمتوں کو مساوات میں لا، ما کی بجائے رکھا جائے تو مساوات پوری ہو جائے

ان قیمتوں کے معلوم کرنے کے لئے ہم مساوات کو اس صورت میں لکھتے ہیں ما = - (۲ لا + ۴)/۳ جس میں مجہول مقدار ما ایک تفاعل درجہ اول - (۲ لا + ۴)/۳ کے مساوی ہے اور لا کی مختلف قیمتوں کے لئے اس تفاعل کی جو قیمتیں ہونگی وہی ما کی

قیمتیں ہونگی۔

پس اس مساوات کے حل معلوم کرنے کے لئے $\text{ما} = -\frac{۲\text{لا}+۴}{۳}$ میں

فرض کرو کہ $\text{لا} = +۱$ تو $\text{ما} = -\frac{۲\times۱+۴}{۳} = -۲$، پس $\left.\begin{matrix}\text{لا} = +۱\\ \text{ما} = -۲\end{matrix}\right\}$ ایک حل ہے

〃 $\text{لا} = \frac{۱}{۳}$ تو $\text{ما} = -\frac{۲\times\frac{۱}{۳}+۴}{۳} = -\frac{۱۴}{۹}$، 〃 $\left.\begin{matrix}\text{لا} = \frac{۱}{۳}\\ \text{ما} = -\frac{۱۴}{۹}\end{matrix}\right\}$ ایک اور حل ہے

〃 $\text{لا} = -۳$ تو $\text{ما} = -\frac{۲\times-۳+۴}{۳} = \frac{۲}{۳}$ 〃 $\left\{\begin{matrix}\text{لا} = -۳\\ \text{ما} = \frac{۲}{۳}\end{matrix}\right.$ 〃

اور ظاہر ہے کہ یہ حل مساوات کو پورا کرتے ہیں مثلاً $\text{لا} = +۱$، $\text{ما} = -۲$ مساوات کو پورا کرتا ہے کیونکہ $۲\times۱ + ۳\times-۲ + ۴ = ۰$ اور اسی طرح اس کی تصدیق ہوسکتی ہے کہ باقی سب حل مساوات کو پورا کرتے ہیں۔

اس عمل سے ظاہر ہے کہ خواہ ہم لا کو کسی مثبت، منفی صحیح عدد یا کسر کے مساوی فرض کریں اس کے جواب میں ما کی ایک قیمت حاصل ہوتی ہے اور لا، ما کی قیمتوں کا یہ جوڑا مساوات کو پورا کرتا ہے، پس معلوم ہوا کہ اس مساوات کے بیشمار حل ہیں، ان میں سے چند جدول ذیل میں دئے گئے ہیں۔

$$۲\text{لا} + ۳\text{ما} + ۴ = ۰ \quad \text{یا} \quad \text{ما} = -\frac{۲\text{لا}+۴}{۳}$$

لا	−۲	−۱	$-\frac{۳}{۴}$	۰	۱	$\frac{۵}{۶}$	۲	۳	......
ما	۰	$-\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۵}{۶}$	$-\frac{۴}{۳}$	−۲	$-\frac{۱۷}{۹}$	$-\frac{۸}{۳}$	$-\frac{۱۰}{۳}$	.....

پس دو مجہول مقداروں کی مساوات درجہ اول $۲\text{لا} + ۳\text{ما} + ۴ = ۰$ کے حل

لا = -۲، لا = -۱، لا = -۳/۴
ما = ۰، ما = -۲/۳، ما = -۵/۶ } وغیرہ وغیرہ ہیں اور یہ تعداد میں بیشمار ہیں۔

اب ہر ایک حل کے لا کی قیمت کو فصلہ اور ما کی قیمت کو معیّن مان کر ایک مستوی سطح پر بلحاظ دو ثابت محوروں کے ایک ایک نقطہ مرتسم کرو اس طرح سے مساوات کے بیشمار حلوں سے بیشمار نقطے حاصل ہوتے ہیں۔ ان نقطوں کو ملانے والا خط اس مساوات کی ترسیم کہلاتا ہے۔

نوٹ۔ قبل ازین ہم نے لا، ما کو مجہول مقداریں کہا ہے۔ جدول بالا سے ظاہر ہے کہ اس مساوات میں لا بتدریج مختلف قیمتیں اختیار کر سکتا ہے اور ان کے جواب میں ما کی قیمتیں متعیّن ہو جاتی ہیں۔ پس اس مساوات میں ہم لا، ما کو دو متغیر مقداریں خیال کر سکتے ہیں۔ آئندہ ایسی مساوات کو ہم دو متغیروں کی مساوات درجۂ اول بھی کہینگے۔

پس مساوات ۲لا + ۳ما + ۴ = ۰ یعنی ما = -(۲لا + ۴)/۳ کی ترسیم بنانے میں ہم لا کی کسی قیمت کو فصلہ اور ما کی متناظر قیمت کو معیّن فرض کرکے نقطے مرتسم کرتے ہیں اور حسب دفعہ ۱۰ تفاعل -(۲لا + ۴)/۳ کی ترسیم بنانے میں ہم لا کی کسی قیمت کو فصلہ اور تفاعل -(۲لا + ۴)/۳ کی متناظر قیمت کو معیّن فرض کرکے نقطے حاصل کرتے ہیں۔

پس اگر فصلہ (یعنی لا) دونوں صورتوں میں ایک ہی ہو تو ایک صورت میں معیّن ما کے مساوی ہے اور دوسری صورت میں -(۲لا + ۴)/۳ کے، لیکن یہ دونوں لا کی تمام قیمتوں کے لئے ایک دوسرے کے مساوی ہیں کیونکہ ما = -(۲لا + ۴)/۳

پس دونوں صورتوں میں اگر فصلے مساوی ہوں تو معیّن بھی

مساوی ہوتے ہیں یعنی دونوں صورتوں میں نقاط مستحصلہ وہی ہیں، پس معلوم ہوا کہ مساوات ۲ لا + ۳ ما + ۴ = ۰ کی ترسیم وہی ہے جو تفاعل $-\frac{۲لا+۴}{۳}$ کی ہے۔

عام طور پر اگر ف (لا)، لا کا کوئی تفاعل ہو تو اسی طرح ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات ما = ف (لا) کی ترسیم وہی ہے جو تفاعل ف (لا) کی ہے کیونکہ اگر دونوں صورتوں میں لا کی ایک ہی قیمت کو فصلہ مانا جائے تو ایک صورت میں معیّن ما ہوگا اور دوسری صورت میں ف (لا)، اور یہ دونوں لا کی تمام قیمتوں کے لئے ہمیشہ مساوی ہوتے ہیں۔

نوٹ۔ دفعہ ۱۰ میں ہم نے تفاعل ۲ لا + ۳ کی ترسیم بنائی ہے، ظاہر ہے کہ مساوات ما = ۲لا+۳ یعنی ۲ لا - ما + ۳ = ۰ کی ترسیم بھی وہی خط ہے جو تفاعل ۲ لا + ۳ کی ترسیم ہے۔

۱۳ — مختصراً ترسیم ایک ایسا مستقیم یا منحنی خط ہے جو نقطوں کے ایک سلسلہ میں سے کھینچا گیا ہو جن کے مقامات پہلے سے معلوم کر لئے گئے ہوں، بعض اوقات یہ نقطے طبیعی مقادیر کو بطور فصلہ اور معین مرتسم کرنے سے حاصل ہونگے، اس کی مثالیں ہمیں اگلے باب میں ملینگی، فی الحال ہم اُن نقطوں کے مقامات دو متغیروں کی مساوات درجہ اول (خطی مساوات) سے حاصل کرینگے۔

ایسی مساوات کی مختلف عددی صورتیں یہ ہو سکتی ہیں

لا - ۱۱ = ۰

ما - ۹ = ۰

۴ لا + ۳ = ۰

۴ لا - ۲ ما - ۱۰ = ۰ وغیرہ وغیرہ

ہم آئندہ دفعات میں ان کی ترسیمیں بنائیں گے اور ان پر بالتفصیل بحث کریں گے۔

۱۳ ۔ لا = ۱۱ اور ما = ۹ کی ترسیمیں

لا = ۱۱ اس طرح لکھی جا سکتی ہے کہ لا + ۰ × ما - ۱۱ = ۰ یعنی یہ خطی مساوات کی خاص صورت ہے جس میں ما کا سر صفر ہے۔

اب اس مساوات کی ترسیم بنانے کے لئے ہمیں اسکے حل معلوم کرنے چاہئیں، اس مساوات کی اس شکل لا + ۰ × ما - ۱۱ = ۰ سے ظاہر ہے کہ ما کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو لا کی قیمت ۱۱ اس کو پورا کرتی ہے۔

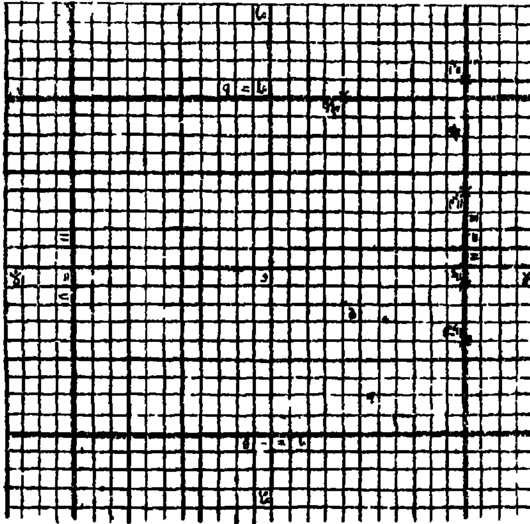
پس مساوات کے حل {لا = ۱۱، ما = -۲}، {لا = ۱۱، ما = -۱}، {لا = ۱۱، ما = ۴}، {لا = ۱۱، ما = ۱۰} وغیرہ وغیرہ ہیں، ان میں لا کی قیمت ہمیشہ ۱۱ کے مساوی ہے لیکن ما کی قیمت جو ہم چاہیں ہو سکتی ہے۔

اب حسب سابق ہر حل کے لا کو فصلہ اور ما کو معین مان کر ہم شکل ذیل میں نقطے مرتسم کرنے سے دیکھتے ہیں کہ ان کو ملانے سے ایک مستقیم خط حاصل ہوتا ہے جو محور ماَ و ما کے متوازی ہے اور اس کے دائیں جانب ۱۱ اکائیوں کے فاصلہ پر واقع ہے، طالب علم دیکھ سکتا ہے کہ مساوات کے کسی اور حل مثلاً

(۱۱، ۷) سے جو نقطہ حاصل ہوتا ہے وہ بھی اسی خط پر واقع ہے اور برعکس اس کے اس خط پر کے کسی نقطہ کے محدد مساوات کو پورا کرتے ہیں، یہ مستقیم خط مساوات لا = ۱۱ کی ترسیم ہے۔

اسی طرح لا = -۱۱ ایک ایسے مستقیم خط کی مساوات ہے جو محور ما کے متوازی ہے اور اس سے ۱۱ اکائیاں بائیں جانب واقع ہے۔

پس عام طور پر مساوات لا = ا جہاں ا مستقل مقدار ہے ایک ایسے مستقیم خط کو تعبیر کرتی ہے جو محور ما کے متوازی ہے اور اس سے فاصلہ ا پر واقع ہے، خود محور ما کی مساوات لا = ۰ ہے



مساوات ما = ۹ کو شکل ۰ × لا + ما - ۹ = ۰ میں رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ خطی مساوات کی ایک خاص صورت ہے جس میں لا کا سر صفر ہے اور اس کے حلوں سے نقاط ذیل حاصل ہوتے ہیں

(−۵، ۹)، (۴، ۹)، (۱۰، ۹)........

ان میں سے ہر نقطہ کا ما محدد یعنی معیّن ۹ اکائیوں کے مساوی ہے اور فصلہ کی کچھ ہی قیمت ہو سکتی ہے، ان نقطوں کو مرتسم کرنے سے ایک خط محور لا کے متوازی حاصل ہوتا ہے جسکا فاصلہ محور لا سے اوپر کی طرف ۹ اکائیوں کے مساوی ہے، یہ خط مساوات ما = ۹ کی ترسیم ہے، اسی طرح ما = −۹ کی ترسیم ایک ایسا خط مستقیم ہے جو محور لا کے متوازی ہے اور ۹ اکائیاں اسکے نیچے کی طرف واقع ہے، دیکھو شکل۔

عام طور پر ما = ب جہاں ب ایک مستقل مقدار ہے ایک ایسے مستقیم خط کی مساوات ہے جو محور لا کے متوازی ہے اور اس سے فاصلہ ب پر واقع ہے۔ خود محور لا کی مساوات ما = ۰ ہے۔

۱۴ ـ اس دفعہ میں ہم ایسی مساواتوں کی ترسیمیں معلوم کرینگے جو ذیل میں مندرج ہیں

ما − لا = ۰، ما − ۲ لا = ۰، ما − ۳ لا = ۰، ۲ ما − لا = ۰، ۳ ما + ۲ لا = ۰

ان میں سے ہر ایک دو متغیروں لا، ما کی مساوات درجہ اول ہے اور رقم مطلق یعنی وہ رقم جس میں مجہول مقدار یا متغیر شامل نہ ہو کسی مساوات میں موجود نہیں ہے، یہ مساواتیں اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

ما = لا، ما = ۲ لا، ما = ۳ لا، ما = $\frac{۱}{۲}$ لا، ما = −$\frac{۲}{۳}$ لا، ....

جہاں ما کا سر ایک ہے اور لا کا سر کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد

یا کسر ہو سکتی ہے۔

ظاہر ہے کہ ان مساواتوں کی ترسیمیں وہی ہیں جو بالترتیب تفاعل لا، ۲لا، ۳لا، ½لا، -⅔لا، .... کی ہیں کیونکہ لا کے بدلنے سے ان تفاعلوں کی جو قیمتیں حاصل ہونگی وہی ما کی قیمتیں ہونگی۔ ذیل کی مشقوں کو طالب علم خود مربع دار کاغذ پر حل کرے۔

(۱) مساوات ما = لا کی ترسیم

اس میں لا کو مختلف قیمتیں دینے سے ما کی متناظر قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں، ظاہر ہے کہ یہ قیمتیں ایک دوسرے کے مساوی ہونگی اور ان سے جو نقطے حاصل ہونگے ان میں سے ہر ایک کا فصلہ اس کے معین کے مساوی ہوگا۔

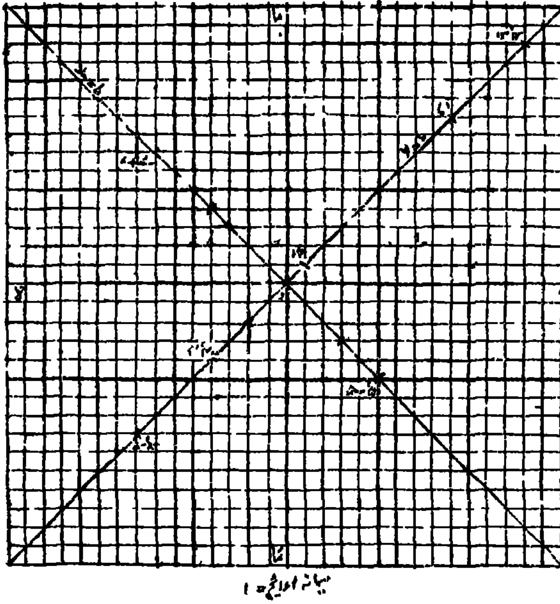
(-۷، -۷)، (-۴، -۴)، (۰، ۰)، (۱، ۱)، (۵، ۵)، (۱۳، ۱۳)،

اگلے صفحہ کی شکل میں ان نقطوں کو مرتسم کیا گیا ہے، ظاہر ہے کہ یہ سب نقطے ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں۔

مناسب ہوگا کہ کسی مساوات کی ترسیم بناتے وقت طالب علم لا اور ما کی قیمتوں کو ایک جدول کی شکل میں اس طرح لکھ لے۔

لا =	-۷	-۴	۰	۱	۵	۱۳	.....
ما =	-۷	-۴	۰	۱	۵	۱۳	.....

اگر مساوات ما = لا میں لا کی کوئی اور قیمت مثلاً -۸ فرض کریں



تو اس کے جواب میں ما کی قیمت -۸ حاصل ہوتی ہے یعنی اس مساوات سے لا، ما کی قیمتوں کا ایک اور زوج یعنی ایک اور نقطہ (-۸، -۸) حاصل ہوتا ہے، اس کو مرتسم کرنے پر معلوم ہوگا کہ یہ بھی اسی مستقیم خط پر واقع ہے، اسی طرح ہر ایک نقطہ جو اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے اسی مستقیم خط پر واقع ہے، اس کے باہر کہیں واقع نہیں ہوسکتا۔

پس اس مساوات کی ترسیم یہ مستقیم خط ہے جو مبدأ میں سے گذرتا ہے اور ربعات اول اور سوم کی تنصیف کرتا ہے یعنی اس خط کے اوپر کی سمت محور لا کی مثبت سمت سے ۴۵° کا زاویہ بناتی ہے۔

اب اس خط پر کوئی نقطہ ن لو، اس کے محدد (۹، ۹) معلوم کرو

یہ محدد مساوات ما = لا کو پورا کرتے ہیں، اسی طرح اس خط پر کے
کسی نقطہ کے محدد اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔

پس مساوات سے جو نقطے حاصل ہوتے ہیں وہ سب کے
سب اس خط پر واقع ہیں اور اس خط پر کے سب نقطے مساوات
کو پورا کرتے ہیں، یعنی اس مساوات کی ترسیم یہ مستقیم خط ہے
اور اس خط کی مساوات ما = لا ہے، پس اس خط کا جبریہ نام
ہم ما = لا رکھ سکتے ہیں۔

مساوات ما = - لا کی ترسیم بھی اسی طرح حاصل ہوسکتی
ہے، مساوات ما = - لا میں لا کو مختلف قیمتیں دینے سے ما
کی جو متناظر قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ جدول ذیل میں دی گئی ہیں

لا =	۳	۵	-۴	-۷	....
ما =	-۳	-۵	۴	۷	....

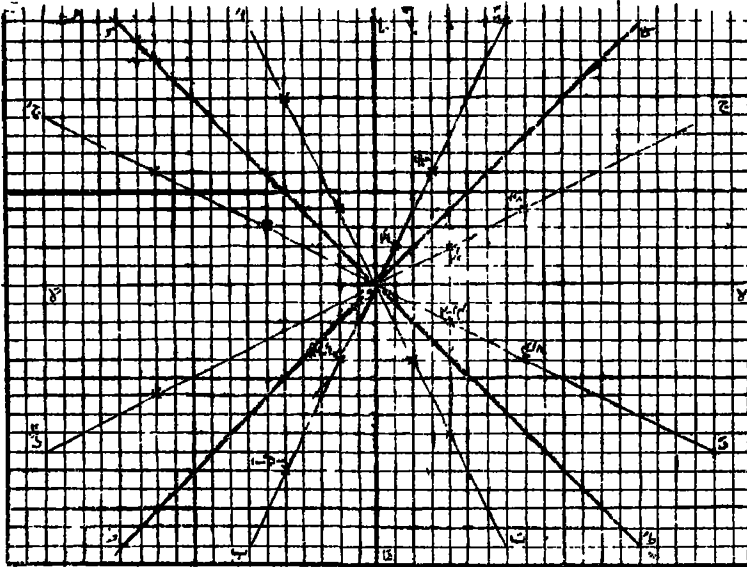
نقاط (۰، ۰)، (۲، -۲) وغیرہ کو شکل صفحہ ۵۳ میں مرتسم کرنے سے معلوم
ہوتا ہے کہ یہ سب کے سب ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں جو
مبدائیں سے گزرتا ہے اور ربعات دوم و چہارم کی تنصیف کرتا
ہے، پس مساوات ما = - لا کی ترسیم یہ خط ہے اور اس خط کا
جبریہ نام ما = - لا ہے۔

(ب) مساوات ما = ۲ لا کی ترسیم

اس مساوات میں لا کو مثبت، منفی قیمتیں دینے سے
ما کی متناظر قیمتیں معلوم کرو اور ان کو جدول کی صورت میں لکھو

لا =	۰	۱	۳	۷	۲ -	۵ -	......
ما =	۰	۲	۶	۱۴	۴ -	۱۰ -	......

حسب معمول ان نقطوں (۰،۰)، (۱، ۲)، (۳، ۶) وغیرہ کو مرتسم کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ سب کے سب ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں جو مبدأ میں سے گزرتا ہے اور ربعات اول و سوم میں واقع ہے۔



ما = ۲ لا کے ساتھ کی مساوات ما = - ۲ لا ہے، اس کی ترسیم بنانے کے لئے جدول ذیل ہے

لا =	۰	۲	۴	۲ -	۵ -	....
ما =	۰	۴ -	۸ -	۴ +	۱	....

ان نقطوں (۲، -۴)، (۴، -۸) وغیرہ کو مرتسم کرنے سے

معلوم ہوتا ہے کہ ان کو ملانے والا خط بھی مستقیم ہے، مبدأ میں سے
گزرتا ہے اور ربعات دوم و چہارم میں واقع ہے، پس یہ خط
اس مساوات کی ترسیم ہے دیکھو شکل بالا۔

شکل سے معلوم ہوگا کہ ما = ۲ لا کی ترسیم کا زاویۂ میلان محور
لا کی مثبت سمت کے ساتھ برابر ہے اُس زاویہ کے جو ما = -۲ لا
کی ترسیم محور لا کی منفی سمت کے ساتھ بناتی ہے یعنی ∠ او لا
= ∠ اَ و لاَ اور ∠ او ما = ∠ اَ و ماَ

یعنی ما = ۲ لا اور ما = - ۲ لا کی ترسیمیں محور ما کی متقابل جانبوں
میں اس سے مساوی زاویے بناتی ہیں
یا مختصراً محور ما میں ایک ترسیم دوسری کا عکس ہے،

شکل بالا میں { ۲ ما - لا = ۰ ، ۲ ما + لا = ۰ } کی ترسیمیں بنائی گئی ہیں۔

یہ مساواتیں اس طرح { ما = $\frac{1}{2}$ لا ، ما = - $\frac{1}{2}$ لا } لکھی جا سکتی ہیں جہاں ما کا
سر ایک ہے اور یہ اکیلا مساوات کے ایک طرف ہے اور لا اور
اس کا عددی سر دوسری طرف ہے، یہ مساوات کی معیاری
صورت ہے۔

ان مساواتوں کی متعلقہ جدولیں یہ ہیں

ما = $\frac{1}{2}$ لا

لا = ۰	۴	۸	-۱۲	....
ما = ۰	۲	۴	-۶	....

ما = - $\frac{1}{2}$ لا

لا = ۰	۴	۸	-۶	....
ما = ۰	-۲	-۴	۳	....

ان نقطوں کو شکل میں مرتسم کیا گیا ہے، ان کے ملانے والے خط مستقیم ہیں اور مبدأ میں سے گزرتے ہیں۔
طالب علم شکل سے دیکھے کہ ما = $\frac{1}{۲}$ لا کی ترسیم کا زاویۂ میلان محور لا کی مثبت سمت (و لا) کے ساتھ ما = لا کی ترسیم کے زاویۂ میلان سے کم ہے اور ما = لا کا زاویہ ما = ۲ لا کے زاویہ سے کم ہے یعنی زاویہ ج و لا < زاویہ س و لا < زاویہ ا و لا
اس سے معلوم ہوتا ہے کہ جیسے لا کا سر تعداداً بڑھتا ہے خط کا زاویۂ میلان بھی بڑھتا جاتا ہے اور ترسیمی خط ربع اول میں زیادہ اونچا ہوتا جاتا ہے، اسی طرح مساواتوں

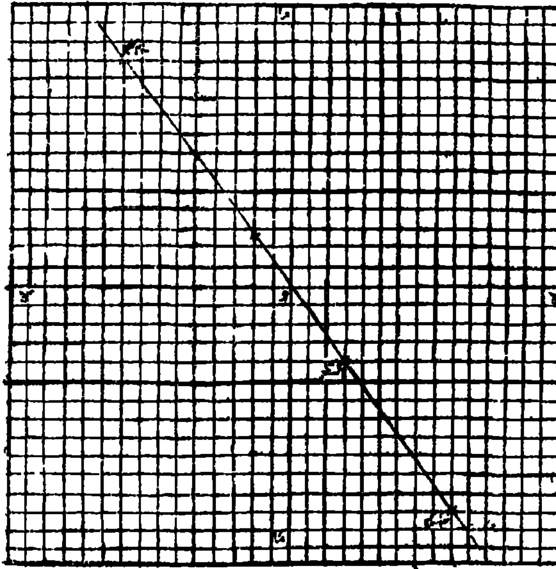
ما = − $\frac{1}{۲}$ لا، ما = − لا، ما = − ۲ لا

کی ترسیموں کے مشاہدہ سے معلوم ہوگا کہ جیسے لا کا سر تعداداً بڑھتا جاتا ہے ترسیموں کے زوایا ء میلان محور لا کی منفی سمت (و لاَ) کے ساتھ بالترتیب بڑھتے جاتے ہیں اور ترسیمیں ربع دوم میں اونچی ہوتی جاتی ہیں۔
(ج) مساوات ۳ ما + ۴ لا = ۰ کی ترسیم۔ مناسب پیمانہ کے انتخاب کی خاطر ہم اس مثال کو حل کرتے ہیں، اس مساوات کی معیاری صورت ما = − $\frac{۴}{۳}$ لا ہے اور لا، ما کی متناظر قیمتوں کی جدول یہ ہوگی

ما = − $\frac{۴}{۳}$ لا

لا	۱	۳	− ۲	− ۳	....
ما	− $\frac{۴}{۳}$	− ۴	۲ $\frac{۲}{۳}$	۴	....

اب تک ہم نے چھوٹے حصہ کو اکائی مانا ہے ' لیکن موجودہ صورت میں ہمیں ایسے طول ناپنے پڑینگے جن کے نسب نماؤں میں ۳ واقع ہوتا ہے جیسے $-\frac{۴}{۳}$ ' $\frac{۸}{۳}$ وغیرہ وغیرہ اس لئے اگر ہم تین چھوٹے حصوں کو اکائی مانیں یعنی ۳ چھوٹے حصے = ۱ تو چھوٹا حصہ $\frac{۱}{۳}$ کے مساوی ہوگا ' پس $-\frac{۴}{۳}$ ناپنے کے لئے ہمیں منفی سمت میں ۴ چھوٹے حصے جانا پڑے گا اور $\frac{۸}{۳}$ کے لئے مثبت سمت میں ۸ چھوٹے حصے ' اس پیمانہ پر شکل ذیل بنائی گئی ہے



پیمانہ ۱۰ = ۱ انچ

پس مساوات ما = $-\frac{۴}{۳}$ لا کی ترسیم مبدأ میں سے گزرنے والا ایک خط ہے جو ربعات دوم و چہارم میں واقع ہے اور ما = - لا کے ترسیمی خط سے اونچا ہے ۔

مساوات ما = $\frac{۴}{۳}$ لا کی ترسیم اوپر کے خط کا عکس ہوگی محور ما

میں اور اس پر یہ نقطے واقع ہونگے
(-۱، -۳/۲)، (-۳، -۹/۲)، (۲، ۲ ۲/۳)، (۳، ۴) وغیرہ وغیرہ

نوٹ نقطہ (-۳، ۴) کا عکس محور ما میں نقطہ (۳، ۴) ہوگا اور اسی نقطہ کا عکس محور لا میں (-۳، -۴) ہوگا، اوپر کے نقطے، خط ما = - ۳/۲ لا کے نقطوں میں فصلوں کی علامات بدلنے سے حاصل کئے گئے ہیں۔

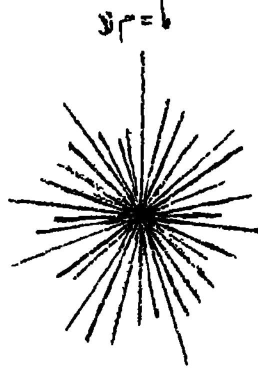
۱۵ — دفعہ آخر میں ہم نے ان مساواتوں

ما = لا ، ما = -لا } ما = ۲ لا ، ما = -۲ لا } ۲ ما - لا = ۰ ، ۲ ما + لا = ۰ } ۳ ما - ۴ لا = ۰ ، ۳ ما + ۴ لا = ۰ }

کو مرتسم کیا- ان میں سے ہر ایک دو متغیروں کی مساوات درجہ اوّل ہے جس میں رقم مطلق موجود نہیں اور ہر ایک مناسب عمل کے بعد اس شکل میں لائی جاسکتی ہے ما = (ایک عدد)×لا یعنی ما = م لا جہاں م ایک مستقل مقدار ہے، م کو مختلف قیمتیں ۱، -۱، ۲، -۲، ۱/۲، -۱/۲، ۳/۲، -۳/۲، ...... دینے سے ہم اوپر کی سب مساواتیں اور اسی طرح کی اور سب مساواتیں حاصل کر سکتے ہیں، پس اس قبیل کی مساواتوں کی عام سے عام شکل **ما = م لا** ہے۔

اوپر ہم نے کہا ہے کہ م ایک **مستقل مقدار** ہے، واضح ہو کہ م کسی ایک مساوات اور اس کی ترسیم کے لیے مستقل ہے، مثلاً فرض کیا کہ م = ۱/۲ تو مساوات ما = ۱/۲ لا حاصل ہوتی ہے، اس کی ترسیم بناتے وقت لا اور ما بدلتے ہیں مگر م

کی قیمت $\frac{1}{2}$ اس مساوات کی ترسیم بناتے وقت نہیں بدلتی لیکن مختلف ترسیمیں حاصل کرنے کے لئے م کی قیمت بدلتی ہے، مثلاً اگر م کی قیمت $\frac{1}{2}$ ہو تو ایک ترسیم حاصل ہوتی ہے، اگر $-\frac{4}{3}$ ہو تو دوسری، وغیرہ وغیرہ



اب ظاہر ہے کہ مساوات ما = م لا میں م کی بے شمار عددی قیمتوں کے جواب میں مبدأ میں سے گزرنے والے بے شمار خط حاصل ہوتے ہیں، ان میں سے چند ساتھ کی شکل میں دکھائے گئے ہیں۔

اجمالی طور پر ہم مساوات ما = م لا اور اس کی ہندسی تعبیر کے باہمی تعلقات کو ذیل میں درج کرتے ہیں

جبریہ ربط	ہندسی تعبیر
ما = م لا دو متغیروں کی مساوات درجہ اول ہے	ہر صورت میں اس کی ترسیم مستقیم خط ہے
مساوات ما = م لا کے بیشمار حل ہیں	اس کی ترسیم پر بے شمار نقطے ہیں۔

مساوات ما = م لا میں رقم مطلق موجود نہیں	اس کی ترسیم ہمیشہ مبدأ میں سے گزرتی ہے۔
مساوات ما = م لا میں م مثبت ہے مثلاً (½)	اس کی ترسیم ربعات اول اور سوم میں واقع ہوتی ہے یعنی محور لا کی مثبت سمت و لا کے ساتھ حادہ زاویہ بناتی ہے
مساوات ما = م لا میں م منفی ہے مثلاً (−½)	اس کی ترسیم ربعات دوم و چہارم میں واقع ہوتی ہے یعنی محور لا کی منفی سمت و لاَ کے ساتھ حادہ زاویہ بناتی ہے۔
اگر مساوات ما = م لا میں م مثبت ہو اور اس کی عددی قیمت بڑھتی جائے	تو اس کی ترسیم کا زاویۂ میلان و لا کے ساتھ بڑھتا جاتا ہے
اگر مساوات ما = م لا میں م منفی ہو اور اس کی عددی قیمت بڑھتی جائے	تو اس کی ترسیم کا زاویۂ میلان و لاَ کے ساتھ بڑھتا جاتا ہے
مساوات ما = م لا اور ما = −م لا کے سر مساوی اور مختلف العلامت ہیں	ان کی ترسیمیں محور ما میں ایک دوسرے کا عکس ہیں۔

۱۶— اب ہم دو متغیروں کی ایسی مساوات درجہ اول کی ترسیم معلوم کرتے ہیں جس میں مطلق یا مستقل رقم موجود ہو ایسی چند مساواتیں یہ ہیں

۲ لا + ۳ ما + ۴ = ۰
۲ ما − ۳ لا − ۱۰ = ۰
۵ ما − ۳ لا + ۴ = ۰

وغیرہ وغیرہ

اور یہ بالترتیب اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

ما = - ۲/۳ لا - ۴/۳

ما = ۲ لا + ۵

ما = ۳/۵ لا - ۴/۵

وغیرہ وغیرہ

یعنی ما اکیلا ایک طرف ہے اور لا (مع اپنے سر کے) اور مستقل رقم دوسری طرف، یہ مساوات کی معیاری صورت ہے۔

اگر بموجب سابق لا کے سر کو م سے تعبیر کریں اور مستقل رقم کو ج سے تو اوپر کی ہر مساوات اور اس طرح کی اور سب مساواتیں اس شکل میں لائی جاسکتی ہیں

ما = م لا + ج

اب ہم ایسی مساواتوں کی ترسیمیں معلوم کرتے ہیں۔

(ا) ۲ ما - ۴ لا - ۱۰ = ۰ کی ترسیم

یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے ۲ ما = ۴ لا + ۱۰

یا ما = ۲ لا + ۵ جو معیاری صورت ہے۔

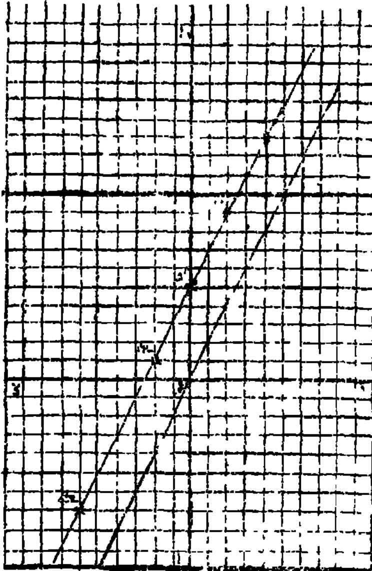
مساوات ما = ۲ لا + ۵ کی ترسیم وہی ہوگی جو تفاعل ۲ لا + ۵ کی کیونکہ لا کی مختلف قیمتوں کے لئے ما اور تفاعل ۲ لا + ۵ کی قیمتیں مساوی ہیں۔

لا کو مختلف قیمتیں دینے سے ما کی قیمتیں نکالو اور ان سے جدول مرتب کرو

ما = ۲ لا + ۵

لا =	۰	۲	۴	۳-	۶-	....
تفاعل ۲ لا + ۵ =	۵	۹	۱۳	۱	۷-	....

نقاط (۰، ۵)، (۲، ۹)، (۴، ۱۳) وغیرہ کو مرتسم کرو، ان نقطوں کو ملانے والا خط ایک مستقیم خط ہے، کوئی اور نقطہ جو اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے مثلاً (-۱، ۳) اس خط پر واقع ہے، طالب علم کوئی نقطہ اس خط پر لے، اس کے محدد معلوم کرے اور دیکھے کہ یہ مساوات ما = ۲ لا + ۵ کو پورا کرتے ہیں۔ پس یہ مستقیم خط مساوات ما = ۲ لا + ۵ کی ترسیم ہے دیکھو شکل۔ یہ خط مبدأ میں سے نہیں گزرتا اور یہ مساوات سے ظاہر ہے، کیونکہ مبدأ کے محدد (۰، ۰) مساوات ما = ۲ لا + ۵ کو پورا نہیں کرتے (۰ = ۲ × ۰ + ۵ مستقل رقم مانع ہے)



مساوات ما = ۲ لا + ۵ میں اگر تھوڑی دیر کے لیے مستقل رقم سے قطع نظر کریں تو مساوات ما = ۲ لا رہ جاتی ہے، شکل بالا میں اس مساوات ما = ۲ لا کی ترسیم بھی بنائی گئی ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ ما = ۲ لا + ۵ کی ترسیم ما = ۲ لا کی ترسیم کے متوازی ہے، یعنی یہ ترسیمیں محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ مساوی زاویے

بناتی ہیں جو مساوی ہونے کے علاوہ دونوں حادے ہیں،
طالب علم اسے بالعموم درست پائے گا کہ اگر معیاری صورت
میں لا کا سر مثبت ہو تو ترسیم محور لا کی مثبت سمت و لا
کے ساتھ حادہ زاویہ بنائے گی اور اگر لا کا سر منفی ہو تو ترسیم
محور لا کی منفی سمت و لا کے ساتھ حادہ زاویہ بنائے گی

مساوات ما = ۲ لا + ۵ میں جو لا کا سر ہے یعنی ۲، اسکو
ہم نے کچھ معنی پہنا دئے کیونکہ ہم نے دیکھا کہ ما = ۲ لا + ۵ ، ما = ۲ لا } کی
ترسیمیں متوازی ہیں یعنی معیاری صورت میں لا کا سر ترسیم
کے میلان کو ظاہر کرتا ہے۔ اب ہم مستقل رقم ۵ کی تعبیر معلوم
کرتے ہیں، دیکھنے سے معلوم ہوگا ما = ۲ لا + ۵ کی ترسیم
محور ما کو ایک ایسے نقطہ پر قطع کرتی ہے جس کا فاصلہ مبدأ
سے اوپر ۵ اکائیوں کے مساوی ہے۔

پس مساوات ما = ۲ لا + ۵ کی ترسیم ہم اس طرح بھی معلوم
کرسکتے ہیں

(۱) مساوات ما = ۲ لا کی ترسیم بناؤ، مبدأ سے ۵ اکائیاں اوپر
محور ما پر ایک نقطہ ثابت کرو اسکے محدد (۰، ۵) ہیں، اس نقطہ میں
سے ایک مستقیم خط کھینچو جو ما = ۲ لا کی ترسیم کے متوازی ہو، یہ خط
مساوات ما = ۲ لا + ۵ کی ترسیم ہوگا۔

(۲) چونکہ ما = ۲ لا + ۵ کی ترسیم کا ہر معین ما = ۲ لا کی
ترسیم کے متناظر معین سے بقدر ۵ کے بڑا ہے اس لئے ترسیم مطلوبہ
اس طرح بھی حاصل ہوسکتی ہے، ما = ۲ لا کی ترسیم بناؤ اس کے ہر معین

کو بقدر ۵ اکائیوں کے اوپر کی طرف خارج کرو جو نقطے اس طرح سے ملیں ان کو ملانے والا خط ما = ۲ لا + ۵ کی ترسیم ہے۔

ان دو ضروری امور کی مزید توضیح کے لئے کہ مساوات ما = ۲ لا + ۵ میں (ا) لا کا سر ۲ ترسیم کے میلان کو ظاہر کرتا ہے اور (ب) ترسیم محور ما کو مبدأ سے ۵ اکائیاں اوپر قطع کرتی ہے ہم اس قسم کی دو اور مثالیں حل کریں گے۔

(ب) مساوات ۵ ما - ۳ لا + ۴ = ۰ کی ترسیم۔ سب سے پہلے اس مساوات کو ما = م لا + ج کی صورت میں لکھو یعنی

ما = ۳/۵ لا - ۴/۵ .... (۱)

بموجب سابق اس مساوات کی ترسیم وہی ہوگی جو تفاعل (۳لا - ۴)/۵ کی۔
مناسب پیمانہ کے انتخاب کے لئے مساوات (۱) اسطرح بھی لکھی جاسکتی ہے ما = ۶ء۰ × لا - ۸ء۰
ظاہر ہے کہ

ما = ۳/۵ لا - ۴/۵

جب	لا	۰	۱	۲	۱-	...
تو	ما	۴/۵ -	۱/۵ -	۲/۵	۷/۵ -	...

انچوں (یا سنتی میٹروں) والے کاغذ میں ۱ء کو چھوٹے حصہ کے مساوی فرض کرنا مناسب ہوگا، اس صورت میں اکائی ایک انچ (یا ایک سنتی میٹر) کے مساوی ہوگی یا چونکہ عددوں کے نسب نماؤں میں ۵ واقع ہوتا ہے ہم انچ والے کاغذ میں ۵ چھوٹے حصوں کو ایک اکائی کے مساوی فرض کرتے

ہیں یعنی چھوٹا حصہ = $\frac{1}{5}$ = ۲ء؛ ہم اس آخری پیمانہ کو اختیار کرینگے
شکل ذیل میں جدول کے نقطوں کو مرتسم کرنے سے مساوات
ما = $\frac{۳}{۵}$ لا − $\frac{۴}{۵}$ کی ترسیم بنائی گئی ہے، اس مساوات میں مستقل
رقم − $\frac{۴}{۵}$ ہے اور اس کی ترسیم واقعی محور ما کو مبدأ سے $\frac{۴}{۵}$ اکائیاں
نیچے کاٹتی ہے نیز ما = $\frac{۳}{۵}$ لا − $\frac{۴}{۵}$ کی ترسیم ما = $\frac{۳}{۵}$ لا کی ترسیم کے متوازی ہے
اور یہ دونوں ترسیمیں و لا سے مساوی اور حادے زاویے
بناتی ہیں اور ہونا بھی یہی چاہیئے کیونکہ لا کا سر دونوں مساوات
میں ایک ہی مثبت مقدار کے مساوی ہے۔

اب مساوات
ما = $\frac{۳}{۵}$ لا + $\frac{۴}{۵}$
...... (۲)
کی ترسیم بھی
ما = $\frac{۳}{۵}$ لا
کی ترسیم کے
متوازی ہوگی
مگر محور ما کو
مبدأ سے $\frac{۴}{۵}$ اکائیاں اوپر قطع کرے گی، اس کی تصدیق
کے لئے دیکھو جدول ذیل اور مساوات کی ترسیم

ما = $\frac{۳}{۵}$ لا + $\frac{۴}{۵}$

لا	۰	۱	−۱	...
ما	۸ء	۱ء۴	۲ء	...

اب لا کے سر کی علامت بدلنے سے مساوات کی دو نئی صورتیں پیدا ہوتی ہیں یعنی

ما = − ۳/۵ لا − ۴/۵ .... (۳)

ما = − ۳/۵ لا + ۴/۵ .... (۴)

ان مساواتوں کے لئے ذیل کی جدولیں مرتب کی گئی ہیں اور ان کی ترسیمیں شکل میں بنائی گئی ہیں ۔

ما = − ۳/۵ لا − ۴/۵

لا	۰	۱	−۱	...
ما	−۸ء	−۱ء۴	−۲ء	....

ما = − ۳/۵ لا + ۴/۵

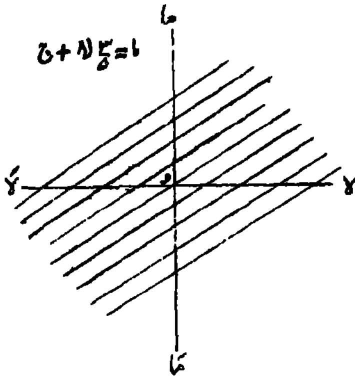
لا	۰	۱	−۱	....
ما	۸ء	۲ء	۱ء۴	.....

ان مساواتوں کی ترسیمیں باہم متوازی ہیں اور و لا کے ساتھ مساوی اور منفرجے زاوئے بناتی ہیں، نیز (۳) کی ترسیم محور ما کو مبدأ سے ۴/۵ اکائیاں نیچے قطع کرتی ہے اور (۴) کی ترسیم ۴/۵ اکائیاں اوپر ۔

طالب علم شکل سے دیکھے کہ { ما = ۳/۵ لا − ۴/۵ ، ما = − ۳/۵ لا − ۴/۵ } کی ترسیمیں محور ما پر کے ایک ہی نقطہ (۰، − ۴/۵) میں سے گزرتی ہیں اور محور ما میں ایک ترسیم دوسری کا عکس ہے اسی طرح { ما = ۳/۵ لا + ۴/۵ ، ما = − ۳/۵ لا + ۴/۵ } کی ترسیمیں محور ما کے ایک ہی نقطہ (۰، ۴/۵) میں سے گزرتی ہیں اور اس محور میں ایک ترسیم دوسری کا عکس ہے ۔

اثنائے عمل میں ہم نے دیکھا کہ { ما = + ۳/۵ لا + ۴/۵ ، ما = + ۳/۵ لا − ۴/۵ } کی ترسیمیں ایک

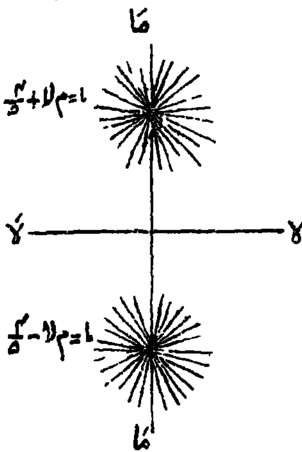
دوسرے کے متوازی ہیں، ان میں سے ہر مساوات کی ترسیم ما = $\frac{۳}{۵}$ لا کی ترسیم کے متوازی ہے اور دراصل اگر اس قسم کی کوئی مساوات لی جائے جس میں مستقل رقم خواہ کچھ ہی ہو لیکن اس میں لا کا سر "+ $\frac{۳}{۵}$" ہو تو اس کی ترسیم لازماً ما = $\frac{۳}{۵}$ لا کی ترسیم کے متوازی ہوگی، مثلاً یہ مساواتیں ما = + $\frac{۳}{۵}$ لا ± $\frac{۶}{۵}$ اور ما = + $\frac{۳}{۵}$ لا ± $\frac{۷}{۹}$ وغیرہ وغیرہ اور بالعموم وہ بے شمار مساواتیں جو ما = + $\frac{۳}{۵}$ لا + ج میں ج کو مختلف مثبت/منفی قیمتیں دینے سے حاصل ہوسکتی ہیں ان سب کی ترسیمیں ایک دوسرے کے اور



مساوات ما = $\frac{۳}{۵}$ لا کی ترسیم کے متوازی ہیں یعنی د لا کے ساتھ مساوی حادے زاویے بناتی ہیں - ج کی مختلف قیمتوں سے محور ما پر کے اُن نقطوں کا فاصلہ مبدأ سے معلوم ہوتا ہے جن میں سے یہ متوازی خط گزرتے ہیں -

اب ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ مساوات ما = $\frac{۳}{۵}$ لا + $\frac{۴}{۵}$ میں مستقل رقم وہی رہتی ہے اور لا کا سر (یعنی خط کا میلان) بدلتا ہے، اس طرح ایسی مساواتیں حاصل ہونگی جیسے ما = ± ۲ لا + $\frac{۴}{۵}$ ، ما = ± $\frac{۹}{۲}$ لا + $\frac{۴}{۵}$ وغیرہ وغیرہ اور یہ سب کی سب بیشمار مساواتیں ما = م لا + $\frac{۴}{۵}$ میں م کو مختلف

مثبت، منفی قیمتیں دینے سے حاصل ہوتی ہیں۔ اب م کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو مساوات ما = م لا + $\frac{۲۴}{۵}$ کی ترسیم محور ما کو مبدأ سے $\frac{۲۴}{۵}$ اکائیاں اوپر کاٹتی ہے یعنی ہمیشہ ثابت نقطہ (۰، $\frac{۲۴}{۵}$) میں سے گزرتی ہے اور ہمیشہ ما = م لا کی ترسیم کے متوازی رہتی ہے، لیکن ہم جانتے ہیں کہ م کی مختلف قیمتوں کے لیئے ما = م لا اُن سب خطوط کو تعبیر کرتی ہے جو مبدأ میں سے گزرتے ہیں اور اس کے گرد ہر سمت میں چاروں طرف واقع ہیں جیسے نصف قطر مرکز دائرہ کے گرد، پس معلوم ہوا کہ ما = م لا + $\frac{۲۴}{۵}$ سے وہ سب خط تعبیر ہوتے ہیں جو نقطہ (۰، $\frac{۲۴}{۵}$) میں سے گزرتے ہیں اور اس کے گرد ہر سمت میں چاروں طرف واقع ہیں، یعنی اگر گھڑی کی سوئی کا ایک سرا نقطہ (۰، $\frac{۲۴}{۵}$) پر رکھدیا جائے اور سوئی اس سرے کے گرد گھومے تو اثنائے گردش میں سوئی وہ سب خط مرتسم کرے گی جو مساوات ما = م لا + $\frac{۲۴}{۵}$ سے تعبیر ہوتے ہیں



اب اگر مساوات ما = $\frac{۳}{۵}$ لا + $\frac{۲۴}{۵}$ میں مستقل رقم اور لا کا سر دونوں بدلیں یعنی مساوات ما = م لا + ج میں م کو بے شمار عددی قیمتیں دی جائیں اور ساتھ ہی ج کو بھی بے شمار مثبت، منفی قیمتیں دی جائیں تو ایسا کرنے سے جو مساواتیں حاصل ہونگی ان کی ترسیموں کا ہم اس طرح کچھ اندازہ لگا سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ گھڑی کی

سوئی کا ایک سرا محور ما پر رکھدیا گیا ہے اور یہ سرا اس محور کے نیچے سے اوپر تک نقطہ بنقطہ حرکت کرتا ہے اور ساتھ ہی ہر نقطہ پر اتنا توقف کرتا ہے کہ سوئی اس سرے کے گرد پوری یا آدھی گھوم جاتی ہے (پورے گھومنے سے ایک خط دو دفعہ مرتسم ہوگا) تو جو مستقیم خط سوئی اپنی اس دوگونہ حرکت میں مرتسم کرے گی وہی ترسیمات مطلوبہ ہونگی۔

(ج) مساوات ما = ۱۱ لا + ۸ کی ترسیم

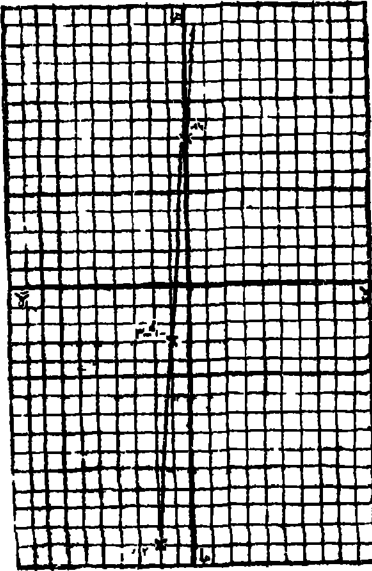
یہ مشق صرف مناسب پیمانوں کے انتخاب کی خاطر دی گئی ہے، اب تک تمام سوالوں میں ہم نے سہولت کے لئے فصلہ اور معین دونوں کو ایک ہی پیمانہ پر ناپا ہے، لیکن یہ ضروری نہیں بلکہ آگے چل کر عام ترسیمات میں ہم دیکھیں گے کہ تصویر کی خوبصورتی اور تناسب کے لئے یہ زیادہ مناسب ہے کہ متغیروں کو مختلف پیمانوں پر ناپا جائے، ترسیمات کے سب سوال شروع سے آخر تک ایک جیسے ہیں اور ایک ہی طریقہ سے حل ہوتے ہیں مگر سوالوں کے خاص حالات کے موافق مناسب پیمانہ کا انتخاب مشق اور فراست پر مبنی ہے، طالب علم کو چاہئے کہ ایک ہی سوال کو مختلف پیمانوں پر اور ایک ہی سوال کے متغیروں کے لئے مختلف پیمانے مان کر اسے حل کرے تاکہ پیمانوں کے منتخب کرنے میں اسے مشق حاصل ہو اور اِن کے مناسب انتخاب کی اہمیت اس کے ذہن نشین ہو جائے۔

مساوات ما = ۱۱ لا + ۸ میں

اگر	لا =	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	....
تو	ما =	-۱۴	-۳	۸	۱۹	۳۰	۴۱	....

بعض معیّن فصلوں کی نسبت بہت بڑے ہیں اور اگر لا کو بڑھایا جائے تو معیّن بہت سرعت سے بڑھتے ہیں۔

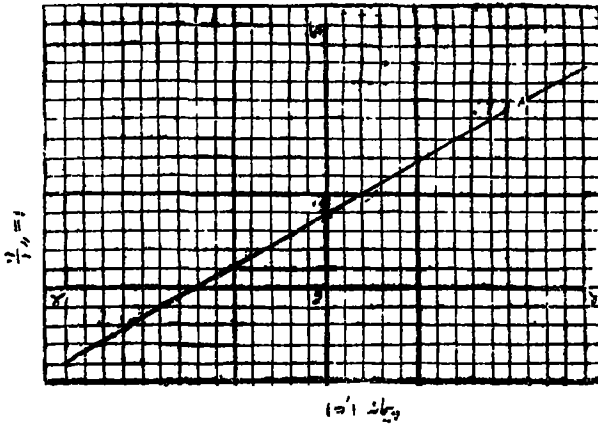
اگر ہم نقاط بالا کے فصلوں اور معینوں کو ایک ہی پیمانہ پر مرتسم کریں اور چھوٹے حصہ کو اکائی فرض کریں تو اس طرح کی شکل حاصل ہوگی جو بلحاظ محوروں کے بہت بے طرح واقع ہوتی ہے، اگر اس سے بڑا پیمانہ اختیار کیا جائے تو شکل کی ترسیم کے لئے بہت بڑے کاغذ کی ضرورت ہوگی اور کتاب کا صفحہ کافی نہ ہوگا۔



طالب علم فصلہ اور معیّن دونوں کو ان پیمانوں پر ناپ کر خود تجربہ کرلے۔

اکائی = ۲ انچ ، ۵, انچ ایک انچ وغیرہ وغیرہ

اس تکلیف سے بچنے کی ایک ترکیب یہ ہے کہ لا کے پیمانہ کی نسبت ما کی قیمتوں کو ناپنے کے لئے مقابلۃً چھوٹا پیمانہ اختیار کیا جائے مثلاً فرض کرو کہ لا کے ناپنے کی اکائی ایک انچ ہے اور ما کی $\frac{1}{10}$ انچ اس پیمانہ پر ما = ۱۱لا + ۸ کی ترسیم حسب ذیل ہوگی جس میں نقطے (-۱، -۳) (۰، ۸)، (۱، ۱۹) وغیرہ مرتسم کئے گئے ہیں عام طور پر یہ کلیہ درست ہوگا کہ جب ایک متغیر دوسرے کی نسبت زیادہ تیزی سے بڑھتا ہو تو



پیمانہ ۱'=۱

اس سرعت پسند متغیر کے لئے چھوٹی اکائی منتخب کی جائے اور دوسرے کے لئے مقابلۃً بڑی۔

ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ترسیم محور لا کو مبدأ سے چار خانے اوپر کاٹتی ہے اب ہر چھوٹا خانہ ما کی دو اکائیوں کے مساوی ہے پس اس نقطہ کا فاصلہ مبدأ سے ۸ ہوا یعنی مستقل رقم کے مساوی۔ طالب علم اس کی تصدیق کرے کہ اگر اسی پیمانہ پر ما = ۱۱ لا کی ترسیم بنائی جائے تو دونوں ترسیمیں ایک دوسرے کے متوازی ہونگی۔

۷۱۔ اب ہم خطی مساوات کی عام سے عام صورت ما = م لا + ج اور اس کی ترسیم کے باہمی تعلقات کو ایک جدول کی شکل میں بیان کر سکتے ہیں، واضح ہو کہ جدولِ ذیل جدول صفحہ (۶۰، ۶۱) کی توسیع ہے۔

جبریہ ربط	ہندسی تعبیر
ما = م لا + ج دو متغیروں کی مساوات درجہ اول ہے۔	ہر صورت میں اس کی ترسیم ایک مستقیم خط ہے۔
مساوات ما = م لا + ج کے بے شمار حل ہیں۔	اس کی ترسیم پر بے شمار نقطے ہیں۔
مساوات ما = م لا + ج اور ما = م لا میں لا کے سر مساوی ہیں۔	ان کی ترسیمیں باہم متوازی ہیں۔
مساوات ما = م لا + ج میں م مثبت ہے مثلاً ۳/۵	اس کی ترسیم محور لا کی مثبت سمت و لا کے ساتھ حادہ زاویہ بناتی ہے۔
مساوات ما = م لا + ج میں م منفی ہے مثلاً -۳/۵	اس کی ترسیم محور لا کی منفی سمت و لا کے ساتھ حادہ زاویہ بناتی ہے
مساوات ما = م لا + ج میں رقم مطلق ج ہے۔	اسکی ترسیم محور ما کو مبدا سے ج اکائیوں کے فاصلہ پر قطع کرتی ہے۔
مساوات ما = م لا + ج میں م مثبت ہے اور اسکی عددی قیمت بڑھتی ہے	اس کی ترسیم کا زاویۂ میلان محور لا کی مثبت سمت و لا کے ساتھ بڑھتا ہے۔
مساوات ما = م لا + ج میں م منفی ہے اور اسکی عددی قیمت بڑھتی ہے۔	اسکی ترسیم کا زاویۂ میلان محور لا کی منفی سمت و لا کے ساتھ بڑھتا ہے۔
مساوات ما = م لا + ج اور مساوات ما = - م لا + ج میں رقم مطلق وہی ہے اور لا کے سر مساوی اور مختلف العلامت ہیں۔	ان کی ترسیمیں محور ما پر کے ایک ہی نقطہ (۰، ج) میں سے گزرتی ہیں اور محور ما میں ایک دوسرے کا عکس ہیں۔

امثلہ نمبری ۴

۱ – لا = ۰، لا + ۴ = ۰، لا – ۳ = ۰، ۲لا + ۵ = ۰، ۳لا ± ۴ = ۰ کی ترسیمیں بناؤ

۲ – ما = ۰، ما + ۵ = ۰، ۲ما ± ۵ = ۰، ۳ما ± ۱۳ = ۰ " "

۳ – لا = ا کی ترسیمیں بناؤ جبکہ ا کی قیمتیں ۳، ۵، –۷، ۵ء۶ ہوں

۴ – ما = ب " " ب " –۳، –۵، ۷، ۵ء۹ "

۵ – جو رقبہ ان مساواتوں ما – ۷ = ۰، ما + ۳ = ۰، لا – ۵ = ۰، ۷لا + ۱۱ = ۰ کی ترسیموں کے اندر گھرا ہوا ہے اُسے معلوم کرو۔

۶ – ایک ہی شکل میں ما = ۳لا، ما = –۳لا، ما = ۱/۳ لا، ما = –۱/۳ لا کی ترسیمیں بناؤ۔

۷ – نقاط ذیل کو مرتسم کرو (۲، ۳)، (۶، ۹)، (۰، ۰)، (–۱۰، –۱۵)، (–۱، –۳/۲)، (۳½، ۵¼)، جس جبریہ مساوات کو یہ پورا کرتے ہیں اُسے معلوم کرو اور اس کی ترسیم بناؤ۔

ذیل کی سات مثالوں میں لا کو قیمتیں ۰، ۱، ۳، ۵، –۲، –۴ دینے سے ما کی متناظر قیمتیں معلوم کرو، ہر صورت میں شکل بناکر دکھاؤ کہ اس طرح جو نقطے حاصل ہوتے ہیں وہ ایک ایسے مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں جو مبدأ میں سے گزرتا ہے۔

۸ – ۲ما = ۳لا
۹ – ۳ما = ۴لا
۱۰ – ۴ما + ۳لا = ۰
۱۱ – ۳لا + ۲ما = ۰
۱۲ – ۲ما + ۵لا = ۰
۱۳ – ۵ما + ۲لا = ۰
۱۴ – ۳لا + ۵ما = ۰

۱۵- ایک ہی شکل میں، ایک ہی پیمانہ پر ان چار مساواتوں کی ترسیمیں بناؤ

(۱) ۳ ما + ۲ لا = ۰ (۲) ۳ ما - ۲ لا = ۰

(۳) ۲ ما + ۳ لا = ۰ (۴) ۲ ما - ۳ لا = ۰

۱۶- تفاعیل ۳/۲ لا، لا + ۲، ۳ لا + ۵، ۲ لا - ۷، ۲ - ۳ لا، ۳ لا/۵ - ۴، (۵ لا + ۲)/۳ کی ترسیمیں بناؤ

ذیل کی مساواتوں کی ترسیمیں بناؤ

۱۷- ما = ۵ لا + ۷

۱۸- ما = ۵ لا - ۱۱

۱۹- ما = - ۳ لا + ۵ ۲۰- ما = - ۳ لا - ۱۷

۲۱- ۱۱ ما + ۷ لا - ۳ = ۰ ۲۲- ۱۴ لا + ۷ ما + ۲۱ = ۰

۲۳- ما + ۳ لا - ۱۱/۲ = ۰ ۲۴- لا/۲ + ما/۵ = ۳/۴

۲۵- لا/۷ - ما/۱۱ = ۱ ۲۶- ما = ۳ + ء۹ × لا

۲۷- ایک ہی شکل میں ان مساواتوں کی ترسیمیں بناؤ

(۱) ما = ۳ لا (۲) ما = ۳ لا + ۵

(۳) ما = ۳ لا - ۵ (۴) ما = ۳ لا + ۷

۲۸- ایک ہی پیمانہ پر ذیل کی مساواتوں کی ترسیمیں ایک ہی شکل میں بناؤ

(۱) ما = ۱ء۵ لا + ۳ (۲) ما = ۱ء۵ لا - ۷

(۳) ما = ۱ء۵ لا + ۲ (۴) ما = ۱ء۵ لا - ۳

اور ثابت کرو کہ یہ سب آپس میں متوازی ہیں۔

۲۹- ذیل کی مساواتوں کی ترسیمیں ایک ہی شکل میں ایک ہی پیمانہ پر بناؤ

(۱) ما = ۳ + ۵ لا (۲) ما = ۳ - ۲ لا

(۳) ما = ۳ + ۷ لا (۴) ما = ۳ - ۴ لا

اور ثابت کرو کہ یہ سب کی سب ایک ہی نقطہ میں سے گزرتی ہیں، اس نقطہ کے محدد معلوم کرو۔

۳۰- ایک ہی شکل میں ذیل کی چار مساواتوں کی ترسیمیں بناؤ

(۱) ما = ۳ لا + ۵ (۲) ما = - ۳ لا + ۵

(۳) ما = ۳ لا - ۵ (۴) ما = - ۳ لا - ۵

اور ان کے اندر جو رقبہ گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو۔

۳۱- ایک ہی شکل میں ذیل کی چار مساواتوں کی ترسیمیں بناؤ

(۱) ۲ ما + ۳ لا + ۸ = ۰ (۲) ۲ ما - ۳ لا + ۸ = ۰

(۳) ۲ ما + ۳ لا - ۸ = ۰ (۴) ۲ ما - ۳ لا - ۸ = ۰

اور ان کے اندر جو رقبہ گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو

خطی ہمزاد مساواتوں کا ترسیمی حل

۱۸- اب تک ہمیں دو متغیروں لا، ما کی ایک مساوات درجہ اول دی ہوئی تھی، ہم نے دیکھا کہ ایسی مساوات کے بیشمار حل ہوتے ہیں، یعنی لا، ما کی قیمتوں کے بے شمار جوڑے اسکو پورا کرتے ہیں، ان جوڑوں سے نقطے حاصل کرکے ہم نے اس مساوات کی ترسیم معلوم کی۔

اب فرض کرو کہ ایسی دو مساواتیں
لا - ۲ ما - ۲ = ۰ ......(۱)
۵ لا + ۵ ما - ۴ = ۰ ......(۲)

دی گئی ہیں اور لا، ما کی قیمتوں کا ایک جوڑا (یا زیادہ جوڑے) مطلوب ہیں جو ان دونوں مساواتوں کو پورا کریں یعنی اگر ایسے جوڑے کے لا، ما کو (۱) میں مندرج کیا جائے تو یہ پوری ہو جائے اور ساتھ ہی اگر (۲) میں مندرج کیا جائے تو یہ بھی پوری ہو جائے۔ اگرچہ ان مساواتوں میں سے کسی ایک کو پورا کرنے والے بیشمار جوڑے ہیں مگر ہم دیکھیں گے کہ ایسا جوڑا صرف ایک ہی ہے جو ان دونوں مساواتوں کو پورا کرتا ہے، اس کو ان **مساواتوں کا حل** کہتے ہیں اور ایسی مساواتیں **ہمزاد مساواتیں** کہلاتی ہیں۔

جبریہ حل - فرض کرو کہ لا، ما کی قیمتیں لا۱، ما۱ دونوں مساواتوں (۱) اور (۲) کو پورا کرتی ہیں، تب

۵ | لا۱ − ۲ما۱ − ۲ = ۰

۱- | ۵لا۱ + ۵ما۱ − ۴ = ۰

پہلی مساوات کو ۵ اور دوسری کو ۱- سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے −۱۵ما۱ − ۶ = ۰ یعنی ما۱ = −۲/۵، اور ما کی یہ قیمت کسی مساوات مثلاً (۱) میں مندرج کرنے سے لا۱ + ۴/۵ − ۲ = ۰

یعنی لا۱ = ۶/۵ پس

لا۱ = ۶/۵ = ۱٫۲
ما۱ = −۲/۵ = −۰٫۴ } مساواتوں کا حل ہے

یعنی لا، ما کی قیمتوں کا صرف ایک جوڑا (۶/۵، −۲/۵) دونوں مساواتوں کو پورا کرتا ہے، طالب علم اس کی تصدیق کرے۔

ترسیمی حل ۔ طالب علم نے دو متغیروں کی مساوات درجہ اول اور اس کی ترسیم کے باہمی تعلق پر غور کیا ہوگا، مساوات کا ہر ایک حل ترسیم پر کے ایک نقطہ کو تعبیر کرتا ہے اور ترسیم پر کا ہر ایک نقطہ مساوات کا ایک حل ہے ۔ اب اگر ایک ہی پیمانہ پر دو خطی مساواتوں کی ترسیمیں بنائی جائیں تو یہ دونوں مستقیم خط ہونگی اور ایک دوسرے کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرینگی ۔ یہ نقطہ دونوں ترسیموں پر واقع ہوگا، ایک ترسیم پر ہونے کی وجہ سے اس کے محدد اس ترسیم کی مساوات کو پورا کریں گے، اسی طرح دوسری ترسیم پر واقع ہونے کی وجہ سے اس کے محدد دوسری ترسیم کی مساوات کو پورا کرینگے، یعنی اس نقطہ کے محدد دونوں مساواتوں کو پورا کرینگے یا بالفاظ دیگر ان مساواتوں کا حل ہونگے۔

پس دو خطی ہمزاد مساواتوں کو ترسیمی طریق پر ہم اس طرح حل کرسکتے ہیں، **ایک ہی پیمانہ پر** دونوں مساواتوں کی ترسیمیں بناؤ اور جہاں یہ ایک دوسرے کو قطع کریں اس نقطہ کے محدد شکل سے دیکھو، یہ محدد یعنی لا، ہا کی قیمتوں کا جوڑا دونوں مساواتوں کا حل ہوگا۔

نوٹ ۔ یاد رہے کہ دونوں ترسیمیں ایک ہی پیمانہ پر بنائی جائیں، اس سے یہ مراد ہے کہ دونوں مساواتوں میں فصلوں کی اکائیاں ایک ہی ہوں اور معیّنوں کی بھی ایک ہی، لیکن فصلہ اور معین دونوں کے لئے ایک ہی اکائی استعمال ہوسکتی ہے۔

(۱) ہمزاد مساواتوں
$$\begin{cases} \text{لا} - ۲\text{ہا} - ۲ = ۰ & (۱) \\ ۵\text{لا} + ۵\text{ہا} - ۳ = ۰ & (۲) \end{cases}$$
کو ترسیمی طریق

پر حل کرو۔

ان مساواتوں کو معیاری شکل میں اس طرح لکھو
ما = ½ لا − ۱ (۱)
ما = − لا + ۴/۵ (۲)

اِن کے حلّوں سے یہ جدولیں مرتب ہو سکتی ہیں

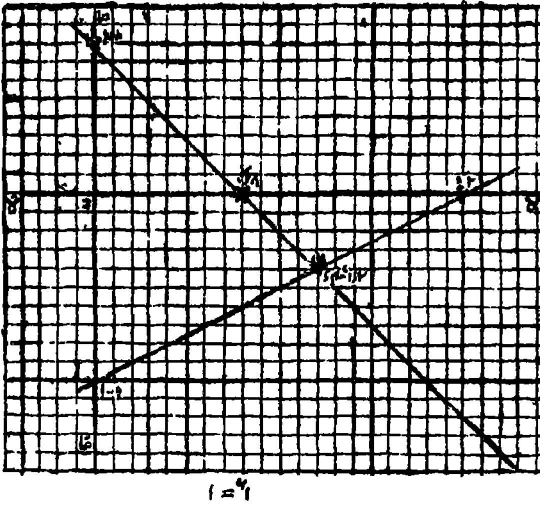
لا − ۲ ما − ۲ = ۰

لا = ۰	۲	۱	......
ما = −۱	۰	−۰٫۵	.....

۵لا + ۵ ما − ۴ = ۰

لا = ۰	۰٫۸	۱	....
ما = ۰٫۸	۰	−۰٫۲	.....

دونوں مساواتوں میں فصلہ اور معین کے لئے ایک انچ کو اکائی فرض کرو، اس طرح چھوٹا حصہ ا ء کو تعبیر کرے گا۔



جدولوں کے نقطوں کو مرتسم کرنے سے دو مستقیم خط حاصل ہوتے ہیں، یہ اِن مساواتوں کی ترسیمیں ہیں اور یہ ایک دوسرے کو ایک نقطہ ن پر قطع کرتی ہیں۔ اب ن کے محدد (۱٫۲ ، −۰٫۴) ہیں یعنی نقطہ ن کا

لا = ۱٫۲ اور ما = −۰٫۴

اب یہ نقطہ پہلی مساوات کی ترسیم پر واقع ہے، اس لئے مساوات لا − ۲ ما − ۲ = ۰ کا حل ہے، نیز یہ دوسری ترسیم پر ہے

اس لئے یہ مساوات ۵ لا + ۵ ما − ۴ = ۰ کا حل ہے، پس یہ دونوں مساواتوں کا حل ہے اور یہی معلوم کرنا مطلوب تھا۔

تصدیق۔ جبریہ طریق پر اس کی تصدیق اس طرح ہو سکتی ہے لا = ۱٫۲ اور ما = −٫۴، پہلی مساوات میں لا، ما کی یہ قیمتیں رکھنے سے

لا − ۲ ما − ۲ = ۱٫۲ − ۲ (−٫۴) − ۲ = ۰، دوسری مساوات میں یہ قیمتیں رکھنے سے ۵ لا + ۵ ما − ۴ = ۵ (۱٫۲) + ۵ (−٫۴) − ۴ = ۰

اسلئے لا = ۱٫۲، ما = −٫۴ مطلوبہ حل ہے

متبادل ثبوت۔ ہم نے اوپر دیکھا کہ دو خطی ہمزاد مساواتوں کا حل معلوم کرنے کیلئے کیا ضروری ہے، ہمیں ایک ہی پیمانہ پر ان مساواتوں کی ترسیمیں بنانی چاہئیں، پھر ان ترسیموں کے نقطۂ تقاطع کے محدد شکل سے معلوم کرنے چاہئیں، اب اگر ہم گزشتہ مثالوں کی بنا پر یہ مان لیں کہ ہر صورت میں دو متغیروں کی مساوات درجہ اول کی ترسیم ایک مستقیم خط ہے تو ترسیم بنانے کا عمل ذرا مختصر ہو سکتا ہے اور بہت سے حلوں کی لمبی جدولیں بنانا ضروری نہیں ہوتا۔

فرض کرو کہ ایک ایسی مساوات دی ہوئی ہے، اس کو دیکھتے ہی ہم پہچان لیں گے کہ اس کی ترسیم ایک مستقیم خط ہے، اب مستقیم خط کے محل کا تعین کرنے کے لئے صرف دو نقطے کافی ہیں اور ہر نقطہ مساوات کا ایک حل ہے، پس مساوات کے صرف دو حل ترسیم بنانے کے لئے ضروری ہوئے، اس لئے معلوم ہوا کہ خطی مساوات کی ترسیم بنانے کے لئے ہم اس مساوات کے کوئی سے دو حل لے سکتے ہیں اور ان کو مرتسم کرنے سے ترسیم بنا سکتے ہیں۔

اکثر اوقات مساوات میں لا کو صفر کے مساوی فرض کرنے سے ما کی متناظر قیمت معلوم کرتے ہیں، اس طرح سے ایک حل حاصل ہوتا ہے اور یہ حل ترسیم کا وہ نقطہ ہے جہاں یہ محور ما سے ملتی ہے کیونکہ اس کا لا محدد صفر ہے۔ اسی طرح دوسرا حل معلوم کرنے کے لئے ما کو صفر کے مساوی فرض کرتے ہیں اور اس کے جواب میں لا کی قیمت نکالتے ہیں، یہ حل ترسیم کے اُس نقطہ کو تعبیر کرتا ہے جہاں ترسیم محور لا سے ملتی ہے، ترسیم بنانے کے لئے یہی دو حل یا نقطے کافی ہیں۔

پس سہولت کی خاطر خطی مساوات کی ترسیم بنانے میں مساوات سے اُن نقطوں کے محدد معلوم کئے جاتے ہیں جہاں یہ محوروں کو قطع کرتی ہے، پھر ان نقطوں کو مرتسم کرنے اور ملانے سے ترسیم حاصل ہوتی ہے، لیکن اگر یہ نقطے پیمانہ اور محددوں کی مقدار وغیرہ کے لحاظ سے مناسب نہ ہوں تو کوئی اور دو نقطے معلوم کرنے چاہئیں۔

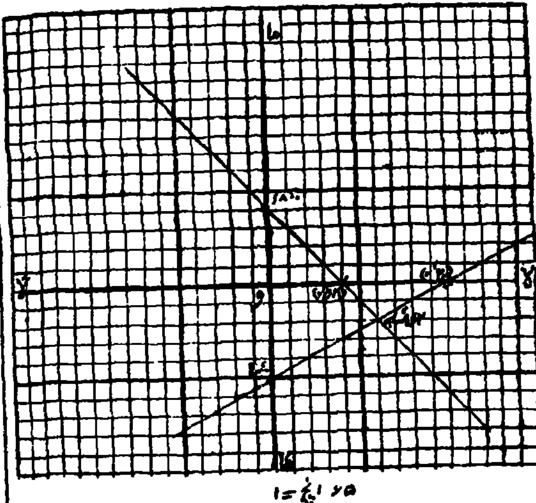
مساوات لا − ۲ ما − ۲ = ۰ کی ترسیم ایک مستقیم خط ہے۔ جہاں یہ خط محور لا سے ملتا ہے اس نقطہ کا معیّن ما = ۰ اور مساوات سے
لا − ۲ = ۰ یعنی لا = ۲

پس محور لا اور خطِ مطلوب کا نقطۂ تقاطع (۲، ۰) ہے۔

اسی طرح جہاں یہ مستقیم خط محور ما سے ملتا ہے اس نقطہ کا لا = ۰ اور مساوات سے −۲ ما − ۲ = ۰ یعنی ما = −۱، پس محور ما پر کا وہ نقطہ جس میں سے خطِ مطلوب گزرتا ہے (۰، −۱) ہے، صرف ان دو نقطوں (۲، ۰) اور (۰، −۱) کو مرتسم کرنے سے ترسیم حاصل ہوسکتی ہے، اسی طرح جہاں ۵ لا + ۵ ما − ۴ = ۰ کی ترسیم محاور لا

اور ما کو قطع کرتی ہے ان نقطوں کے محدد بالترتیب (۸ و ۰) اور (۰، ۸ و) ہیں، ان کو مرتسم کرنے اور ملانے سے دوسری ترسیم حاصل ہوگی۔

اب ان چاروں نقطوں کو مرتسم کرنے کے لئے مناسب پیمانہ کا انتخاب ضروری ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ دونوں محوروں پر ایک چھوٹا حصہ = ۲ یعنی ۵ چھوٹے حصے = ۱ اس پیمانہ پر ساتھ کی شکل بنائی گئی



۵ ر ا یخ = ۱

ہے ترسیموں کا نقطۂ تقاطع (۲ و ا، -۴ و) ہے اور یہی مساواتوں کا مطلوبہ حل ہے۔

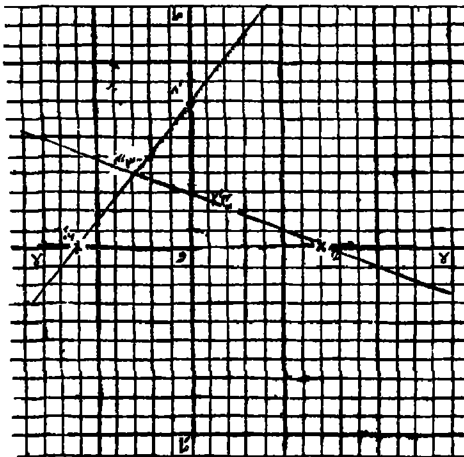
(ب) مساواتوں
۴ لا - ۳ ما + ۲۴ = ۰ (۱)
۲ لا + ۵ ما - ۱۴ = ۰ (۲)
کا ترسیمی حل

یہ دونوں خطی مساواتیں ہیں اس لئے ان کی ترسیمیں مستقیم خط ہونگی اور مستقیم خط کے محل کے تعین کے لئے صرف دو نقطے کافی ہیں دیکھو متبادل ثبوت حصہ ا، اس لئے ہم ہر ترسیم پر کے صرف دو نقطے معلوم کرینگے۔

جہاں (۱) کی ترسیم محور لا سے ملتی ہے اس نقطہ کے محدد (-۶، ۰) ہیں

جہاں (۱) کی ترسیم محور ما سے ملتی ہے اس نقطہ کے محدد (۰، ۸) ہیں
پس (۱) کی ترسیم نقاط (-۶، ۰) اور (۰، ۸) کو مرتسم کرنے اور
ملانے سے حاصل ہوتی ہے۔

دوسری مساوات ۲ لا + ۵ ما - ۱۴ = ۰ کی ترسیم محاور لا
اور ما کو بالترتیب نقاط (۷، ۰) اور (۰، $\frac{۱۴}{۵}$) پر قطع کرے گی
اب دوسرے نقطہ میں ایک محدد کی قیمت کسور ہے اس



لحاظ سے مرتسم کرنے کے
لئے یہ نقطہ ایسا موزون
نہیں، اس لئے اس مساوات
کی ترسیم پر ہم ایک اور
نقطہ معلوم کرنے کی کوشش
کرتے ہیں جسکے محدد صحیح
عدد ہوں، اس مساوات
کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

ما = $\frac{۱۴ - ۲ لا}{۵}$ اور اس میں لا کو مسلسل مثبت، منفی صحیح قیمتیں
دینے سے ہم ما کی ایسی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں جو صحیح ہوں
مثلاً اگر لا = ۲ تو ما = ۲ اور اگر لا = ۷ تو ما = ۰، یہ سب عمل زبانی
ہو سکتا ہے۔

پس دوسرے خط پر دو نقطے (۲، ۲) اور (۷، ۰) ہیں، ان کو
شکل میں مرتسم کر کے مساوات کی ترسیم بنائی گئی ہے۔
دونوں ترسیموں کے نقطۂ تقاطع کے محدد (-۳، ۴) ہیں

پس لا = -۳، ما = ۴ دونوں مساواتوں کا حل ہے۔

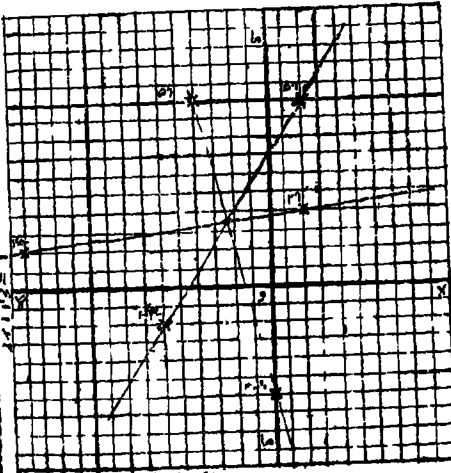
(ج) ذیل کی تین مساواتوں کی ترسیمیں بناؤ اور ثابت کرو کہ یہ ایسے تین خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہیں جو ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں، اس نقطہ کے محدد معلوم کرو۔

۳ لا - ۲ ما + ۷ = ۰ .... (۱)

۴ لا + ما + ۳ = ۰ .... (۲)

لا - ۸ ما + ۱۵ = ۰ .... (۳)

یہ خطی مساواتیں ہیں اس لئے ان کی ترسیمیں مستقیم خط ہونگی۔ پہلی مساوات ما = $\frac{۳ لا + ۷}{۲}$ کی ترسیم پر دو نقطے (۱، ۵) اور (-۳، -۱) ہیں۔



۰ء۲ انچ = اکائی

دوسری مساوات ما = -۴ لا - ۳ کی ترسیم پر دو نقطے (۱، -۳) اور (-۲، ۵) ہیں۔

تیسری مساوات لا = ۸ ما - ۱۵ کی ترسیم پر دو نقطے (۱، ۲) اور (-۷، ۱) ہیں۔

ان نقطوں کو مرتسم کرنے سے مساواتوں کی ترسیمیں بنائی گئی ہیں اور یہ تینوں ایک نقطہ میں سے گزرتی ہیں جس کے محدد قریب قریب (-۱ء۱، ۱ء۷) ہیں۔

۱۹۔ خطی ہمزاد مساواتوں کے حل کے متعلق دو تین باتیں غور طلب ہیں۔

(۱) **ایک متغیّر کی مساوات درجہ اول کے حل کو** ہم دو خطی ہمزاد مساواتوں کے حل پر موقوف کر سکتے ہیں مثلاً فرض کرو کہ (۴لا + ۲۴)/۳ = (۱۴ − ۲لا)/۵ ......(۱) کو ترسیمی طریق پر حل کرنا مطلوب ہے یعنی مجہول مقدار لا کی ایک ایسی قیمت معلوم کرنا ہے کہ طرفین مساوات ایک دوسرے کے مساوی ہو جائیں۔

اب (۴لا + ۲۴)/۳ = (۱۴ − ۲لا)/۵ سے جو ربط مساوات مفہوم ہوتا ہے اس کو ہم ان دو ہمزاد مساواتوں

ما = (۴لا + ۲۴)/۳
ما = (۱۴ − ۲لا)/۵ } ......(۲) سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

ان دو مساواتوں کو ترسیمی طریق پر حل کرنے سے لا، ما کی جو قیمتیں لا۱، ما۱ ملیں گی وہ اوپر کی دونوں مساواتوں کو پورا کریں گی یعنی

ما۱ = (۴لا۱ + ۲۴)/۳
ما۱ = (۱۴ − ۲لا۱)/۵ } پس لا کی قیمت لا۱ ایسی ہوگی کہ (۴لا۱ + ۲۴)/۳ = (۱۴ − ۲لا۱)/۵ کیونکہ ان جملوں میں سے ہر ایک ایک ہی مقدار ما۱ کے مساوی ہے یعنی لا۱ مساوات (۱) کا مطلوبہ حل ہے اور یہ مساواتوں (۲) کی ترسیموں کے نقطۂ تقاطع کا فصلہ ہے۔

پس (۱) کو ترسیمی طریق پر حل کرنے کے لئے مساواتوں

ما = (۴لا + ۲۴)/۳
ما = (۱۴ − ۲لا)/۵ } کی ترسیمیں بناؤ، ان کے نقطۂ تقاطع کا فصلہ (۱) کا حل ہوگا۔

نوٹ۔ دفعہ گزشتہ کے حصہ (ب) میں مساواتوں

ما = (۴لا + ۲۴)/۳
ما = (۱۴ − ۲لا)/۵]

کو ترسیمی طریق پر حل کرکے لا، ما کی قیمتیں معلوم کی گئی ہیں یعنی

لا = −۳
ما = ۴ } نقطۂ تقاطع کے محدد ہیں اور فصلہ لا = −۳،

اب ہم اس کی تصدیق کر سکتے ہیں کہ لا کی جگہ -۳ رکھنے سے طرفین مساوات $\frac{۴لا+۲۴}{۳} = \frac{۱۴-۲لا}{۵}$ مساوی ہو جاتی ہیں کیونکہ

$\frac{۴لا+۲۴}{۳} = \frac{۲۴+۴(-۳)}{۳} = ۴$ جو نقطۂ تقاطع کے معین ما کی قیمت ہے

اور $\frac{۱۴-۲لا}{۵} = \frac{۱۴-۲(-۳)}{۵} = ۴$ جو نقطۂ تقاطع کے معین ما کی قیمت ہے

اسی طرح ہم مساوات ۳لا + ۵ = ۰ کے حل کو دو ہمزاد مساواتوں

ما = ۳لا + ۵
ما = ۰ } کے حل پر موقوف کر سکتے ہیں، ما = ۳لا + ۵ کی ترسیم ایک مستقیم خط ہے اور ما = ۰ کی ترسیم محور لا ہے، جہاں ما = ۳لا + ۵ کی ترسیم محور لا سے ملتی ہے وہی ان کا نقطۂ تقاطع ہے، اس نقطہ کا فصلہ یعنی لا، محدد مساوات ۳لا + ۵ = ۰ کا حل ہے۔

(۲) اگر دو ہمزاد مساواتیں غیر مطابق ہوں تو ان کا کوئی محدود حل حاصل نہیں ہو سکتا مثلاً

لا + ۳ما - ۲ = ۰
۳لا + ۹ما - ۸ = ۰ } غیر مطابق ہیں کیونکہ یہ اس طرح لکھی جا سکتی ہیں

$$\left.\begin{aligned} ما &= -\frac{۱}{۳}لا + \frac{۲}{۳} \\ ما &= -\frac{۱}{۳}لا + \frac{۸}{۹} \end{aligned}\right\} \quad ....(۱)$$

طالب علم جبریہ طریق سے کوشش کر کے دیکھ لے کہ لا، ما کی قیمتوں کا کوئی ایسا جوڑا معلوم نہیں ہو سکتا جو ان دونوں مساواتوں کو پورا کر سکے، نیز چونکہ ایسا جوڑا ان کی ترسیموں کے نقطۂ تقاطع کے محددوں کو تعبیر کرتا ہے، اس لئے معلوم ہوا کہ ان کی ترسیمیں ایک دوسرے کو قطع نہیں کرینگی یعنی متوازی ہونگی اور یہ امر مساواتوں کی شکل (۱) سے ظاہر ہے۔

(۳) یہ بھی ضروری ہے کہ ہمزاد مساواتیں جن کا حل مطلوب
ہے ایک دوسرے پر منحصر یا موقوف نہ ہوں مثلاً { ۴لا + ۳ما − ۱ = ۰ ، ۱۶لا + ۱۲ما − ۴ = ۰ }
ایک دوسرے پر منحصر ہیں کیونکہ دوسری مساوات پہلی کو
۴ سے ضرب دینے سے حاصل ہو سکتی ہے۔ دونوں صورتوں
میں لا، ما کی قیمتوں کے لاانتہا جوڑے جو مساواتوں کو پورا
کرتے ہیں وہی ہونگے ترسیمی نقطہ نظر سے یہ مساواتیں دو
ایسے مستقیم خطوں کو تعبیر کرینگی جو ایک دوسرے پر منطبق ہوتے
ہیں اور ان کے مشترک نقطوں کی تعداد لاانتہا ہے۔

۲۰- اب تک ہمیں دو متغیروں کی ایک مساوات درجہ اول دی ہوئی
تھی جس کے حل معلوم کرنے اور ان کو مرتسم کرنے سے ہم نے
اس کی ترسیم معلوم کی۔ اب برعکس اس کے ایک مستقیم خط دیا ہوا
ہے اور ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ اس خط پر کے سب نقطوں کے
محدد کس مساوات کو پورا کرتے ہیں یا بالفاظ دیگر اس خط کی مساوات
مطلوب ہے۔

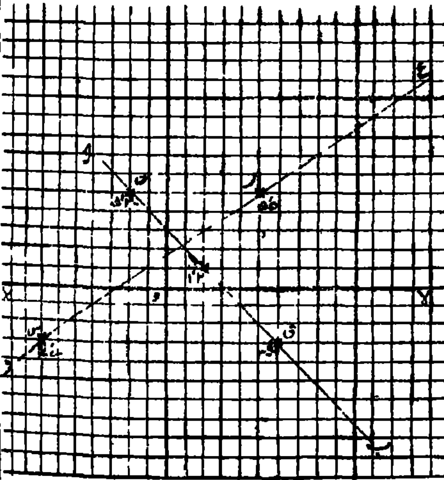
اب تک جتنی مثالیں ہم نے حل کی ہیں ان میں ہم نے دیکھا
کہ خطی مساوات کی ترسیم ایک مستقیم خط ہے اور ایک مستقیم خط پر
کے سب نقطے ایک خطی مساوات کو پورا کرتے ہیں، اس بناء پر
ہم یہ مان لیتے ہیں کہ مفروضہ خط کی مساوات بھی ایک خطی مساوات ہے

اب تمام خطی مساواتیں اس مساوات ما = م لا + ج میں
شامل ہیں کیونکہ م اور ج کو مختلف عددی قیمتیں دینے سے ہم
اس قسم کی جو مساوات چاہیں حاصل کر سکتے ہیں، پس مفروضہ خط

کی مساوات ما = م لا + ج ہے جہاں م اور ج کی وہ قیمتیں جو اس خط کے ساتھ مخصوص ہیں معلوم کرنا باقی ہے۔

اس غرض کے لئے خطِ مفروض کو دیکھنا چاہئے، اگر یہ کاغذ پر کھنچا ہوا ہو یا اس کے ایسے اجزا (مثلاً دو نقطے یا ایک نقطہ اور زاویۂ میلان کسی ثابت خط سے) معلوم ہوں جن کے ذریعہ یہ کھنچ سکے تو بلحاظ کسی مناسب محاور کے ہم اس خط پر کے دو نقطوں کے محدد معلوم کرسکتے ہیں، اب یہ محدد مساوات ما = م لا + ج کو پورا کرینگے کیونکہ حسب مفروض یہ اس کی مساوات ہے، پس اگر ان نقطوں کے محددوں کو اس مساوات میں مندرج کیا جائے تو م اور ج کی رقوم میں ہمیں دو ہمزاد مساواتیں ملیں گی جن کو جبریہ طریق پر حل کرنے سے ہم م اور ج کی مطلوبہ قیمتیں معلوم کرسکتے ہیں دیکھو امثلہ ذیل

(۱) شکل ہذا میں دو خطوط مستقیم اب اور رع دکھینچے گئے ہیں ان کی مساواتیں معلوم کرو۔



کاغذ کی سطح پر دو متقاطع علی القوائم محور لالاَ، ماماَ کھینچو اور خط اب پر کے دو نقاط ن، ق کے محدد شکل سے بلحاظ ان محوروں کے معلوم کرو۔ ن کے محدد (-۲، ۵) ہیں اور ق کے (۶، -۳)، اس خط پر اور جتنے نقطے ہیں ہم اُن سب

اع اغ = ۱

کے محدد معلوم کر سکتے ہیں لیکن ہماری اغراض کے لئے صرف دو نقطے کافی ہیں۔

اب چونکہ اب ایک مستقیم خط ہے اُس کی مساوات لازماً ایک خطی مساوات ہوگی، فرض کرو کہ مساوات مطلوبہ ما = م لا + ج ہے، اب پر کے سب نقطے اس مساوات کو پورا کرتے ہیں اسلئے نقطہ ن کے محدد لا = -۲، ما = ۵ اس کو پورا کرینگے، ان کو مندرج کرنے سے ۵ = -۲م + ج ......(۱)

اسی طرح ق کے محدد لا = ۶، ما = -۳ مساوات ما = م لا + ج کو پورا کرتے ہیں پس -۳ = ۶م + ج .....(۲)

تفریق کرنے سے ۸ = -۸م یعنی م = -۱ اور ج = ۵ + ۲م = ۳

پس اب کی مساوات ما = -لا + ۳ یعنی ما + لا - ۳ = ۰ ہے۔

اس کی تصدیق کے لئے اب پر کوئی اور نقطہ ط لو اسکے محدد (۲، ۱) ہیں اور یہ مساوات کو پورا کرتا ہے اسی طرح اس خط پر کے اور سب نقطوں کے محدد اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔

بعینہٖ ایسے عمل سے ع د کی مساوات معلوم ہو سکتی ہے اس پر کوئی دو نقطے ر، س لو، کوشش یہ ہونی چاہیئے کہ اُن نقطوں کو لیا جائے جن کے محدد پیمانہ کے لحاظ سے حتی الوسع صحیح عددوں سے تعبیر ہوں، فرض کرو کہ ع د کی مساوات ما = م لا + ج ہے، نقاط ر (۵، ۵)، س (-۷، -۳) اسکو پورا کرتے ہیں یعنی

۵ = ۵م + ج
-۳ = -۷م + ج } تفریق کرنے سے ۸ = ۱۲م یعنی م = ۲/۳

اور ج = ۵ - ۵ × ۲/۳ = ۵/۳، پس ع د کی مطلوبہ مساوات

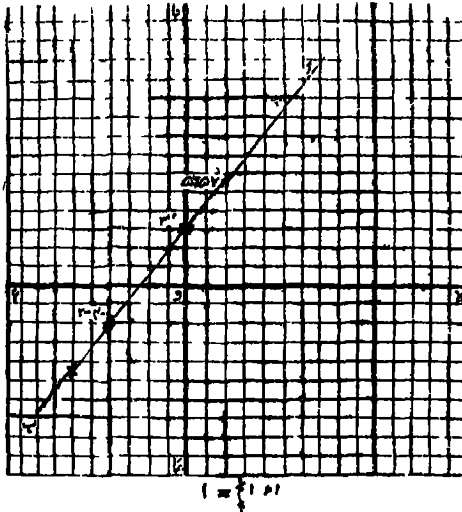
ما = $\frac{۲}{۳}$ لا + $\frac{۵}{۳}$ یعنی ۲ لا - ۳ ما + ۵ = ۰ ہے

(ب) ثابت کرو کہ نقاط

لا =	۲	۰	-۴	-۶
ما =	۵٫۵	۳	-۲	-۴٫۵

ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں' اس خط کی مساوات معلوم کرو۔

ان میں سے کسی دو نقطوں کو مرتسم کرنے اور ملانے سے ایک مستقیم خط حاصل ہوگا'



مثلاً دوسرے اور تیسرے نقطہ کو ملانے والا خط اب کھینچو' پہلے اور چوتھے نقطہ کو مرتسم کرو یہ نقطے اس خط پر واقع ہیں' دیکھو شکل۔

فرض کرو کہ دوسرے اور تیسرے نقطوں کو ملانے والے خط کی مساوات ما = م لا + ج ہے۔

ان نقطوں کے محدد مندرج کرنے سے ۳ = ج اور -۲ = -۴ م + ج یعنی م = $\frac{۵}{۴}$ ' پس اب کی مساوات ما = $\frac{۵}{۴}$ لا + ۳ یعنی ۵ لا - ۴ ما + ۱۲ = ۰ ہے۔

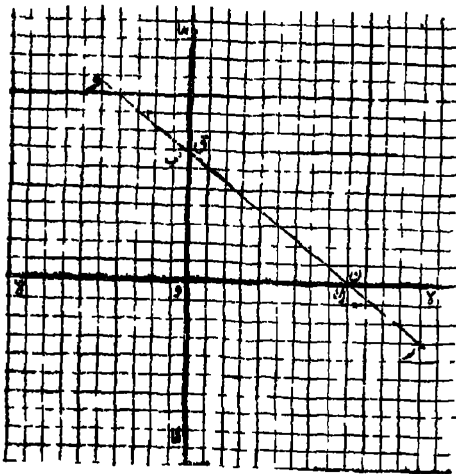
نقطہ (۲ ' ۵٫۵) اس کو پورا کرتا ہے کیونکہ ۵×۲ - ۴×۵٫۵ + ۱۲ = ۰

اسی طرح نقطہ (-۶ ' -۴٫۵) بھی اس مساوات کو پورا کرتا ہے۔

پس اگر یہ معلوم کرنا ہو کہ کوئی نقطہ ایک مساوات کی ترسیم پر واقع

ہوتا ہے یا نہیں تو اس کے لئے یہ ضروری نہیں کہ مساوات کی ترسیم بنائی جائے اور پھر نقطہ کو مرتسم کرنے سے معلوم کیا جائے کہ واقعی یہ ترسیم پر ہے یا نہیں، اس امر کے لئے صرف اتنا کافی ہے کہ ہم نقطہ کے محدد مساوات میں مندرج کریں، اگر اس طرح مساوات پوری ہو جائے تو سمجھ لینا چاہیے کہ نقطہ مساوات کی ترسیم پر واقع ہوتا ہے ورنہ نہیں۔

۲۱ ۔ اگر ایک خطِ مستقیم محاور لا اور ما کو ایسے نقطوں پر کاٹے جنکے فاصلے مبدأ سے بالترتیب ا اور ب ہوں تو اس کی مساوات ان مابینی حصوں کی رقوم میں اس طرح معلوم ہو سکتی ہے



فرض کرو کہ خط در محوروں کو نقاط ن اور ق پر کاٹتا ہے جہاں ون = ا، اور وق = ب،

∴ اب نقطہ ن کے محدد (ا، ۰) ہیں اور ق کے (۰، ب)۔

فرض کرو کہ مستقیم خط در کی مساوات ما = م لا + ج ہے جہاں م اور ج کی قیمتیں ا اور ب کی رقوم میں مطلوب ہیں، اب چونکہ یہ خط نقاط (ا، ۰) اور (۰، ب) میں سے گذرتا ہے اسلئے ۰ = ا م + ج اور ب = ۰ + ج

یعنی ج = ب اور م = $-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$

پس مساوات مطلوبہ ہوئی ما = $-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ لا + ب

یعنی ا ما + ب لا = ا ب

طرفین کو ا ب پر تقسیم کرنے سے $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱$ ...... (۱)

یعنی $\frac{\text{لا}}{\text{و ن}} + \frac{\text{ما}}{\text{و ق}} = ۱$

مشق ۱۔ جو خط محاور لا، ما پر بالترتیب ایسے حصے −۳، ۵ کاٹتا ہے اس کی مساوات $\frac{\text{لا}}{-۳} + \frac{\text{ما}}{۵} = ۱$ یعنی ۵ لا − ۳ ما + ۱۵ = ۰ ہے

مشق ۲ — ان مساواتوں $\left\{\begin{array}{l} \text{۲ لا + ۳ ما + ۷ = ۰} \\ \text{۵ لا + ۷ ما + ۱۱ = ۰} \end{array}\right.$ کی ترسیمیں محاور پر جو حصے کاٹتی ہیں انہیں معلوم کرو اور مساواتوں کو مساوات (۱) کی صورت میں لاؤ۔

۲۲۔ اس باب کو ختم کرنے سے پہلے ہم خطی مساوات کے متعلق چند متفرق باتوں کا ذکر کرنا مناسب سمجھتے ہیں۔

(۱) خطی مساوات کی عام سے عام صورت ما = م لا + ج ہے اور یہ ایک مستقیم خط کو تعبیر کرتی ہے، کسی **ایک** خط پر کے تمام نقطوں کے لئے م اور ج مستقل رہتے ہیں صرف لا اور ما بدلتے ہیں، م کو ہم نے اس خط کا **میلان** یا ڈھال کہا ہے، یاد رہے کہ یہ زاویۂ میلان نہیں ہے۔

اگر ایک مستقیم خط پر کے دو نقطے معلوم ہوں تو ان کے محددوں کی رقوم میں خط کی ڈھال یعنی م معلوم ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ مفروضہ نقطے (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) ہیں، چونکہ یہ خط پر ہیں اس لئے یہ اسکی مساوات کو پورا کرتے ہیں۔

یعنی $ما_۱ = م لا_۱ + ج$

$ما_۲ = م لا_۲ + ج$

تفریق کرنے سے $ما_۲ - ما_۱ = م(لا_۲ - لا_۱)$ یعنی خط کا ڈھال $م = \frac{ما_۲ - ما_۱}{لا_۲ - لا_۱}$

اب چونکہ ایک خط کے لئے م مستقل غیر متبدل چیز ہے جیسے ۲، $\frac{۱}{۲}$ وغیرہ اس لئے معلوم ہوا کہ ایک خط پر کے کسی دو نقطوں کیلئے نسبت $\frac{ما_۲ - ما_۱}{لا_۲ - لا_۱}$ یعنی $\frac{\text{ما کی بیشی}}{\text{لا کی بیشی}}$ ہمیشہ مستقل رہتی ہے۔

اب اگر کئی نقطوں کے محدد دیئے ہوئے ہوں اور یہ معلوم کرنا ہو کہ یہ ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں یا نہیں تو صرف یہ دیکھنا کافی ہوگا کہ نسبت $\frac{ما_۲ - ما_۱}{لا_۲ - لا_۱}$ نقطوں کے ہر ایک جوڑے کے لئے وہی ہے یا نہیں۔

مثلاً سوال (ب) دفعہ ۲۰ میں جو نقطے

لا	۲	۰	−۴	−۶
ما	۵٫۵	۳	−۲	−۴٫۵

معلوم ہیں وہ سب ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں کیونکہ پہلے اور دوسرے نقطہ کے لئے نسبت $\frac{ما_۲ - ما_۱}{لا_۲ - لا_۱}$ کی قیمت $\frac{-۲}{-۲٫۵}$ یعنی $\frac{۴}{۵}$ ہے پہلے اور تیسرے کے لئے $\frac{-۶}{-۷٫۵} = \frac{۴}{۵}$ دوسرے اور تیسرے اور چوتھے وغیرہ سب کے لئے یہ نسبت ایک ہی ہے۔

(۲) ایک عددی خطی مساوات $۲ لا + ۳ ما + ۴ = ۰$ ہے، اسکی عام صورت $ا لا + ب ما + د = ۰$ ہو سکتی ہے، بظاہر ان مساواتوں میں تین مستقل مقداریں ہیں لیکن فی الحقیقت دو ہیں کیونکہ ان کو بالترتیب ۳ اور ب پر تقسیم کرنے اور تقلیب سے

یہ مساواتیں اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

ا = − ۲/۳ لا − ۴/۳

ا = − الف/ب لا − ج/ب

جو ا = م لا + ج میں شامل ہیں کیونکہ کسری رقوم − الف/ب ، − ج/ب کیلئے حروف م اور ج سے تعبیر ہوسکتی ہیں جہاں ہر ایک حرف (م یا ج) کسی عدد مثبت، منفی، صحیح یا کمسور کے مساوی ہوسکتا ہے

امثلہ نمبری ۵

ذیل کی مساواتوں کو عمل ترسیمی سے حل کرو

۱ − لا = ۰ ، ۲لا + ۳ا = ۴ ۲ − ا = ۰ ، ۳لا − ۵ا = ۷

۳ − لا − ۲ = ۰ ، ۳لا + ۲ا = ۶ ۴ − ا + ۳ = ۰ ، ۵لا + ۳ا = ۴

۵ − لا + ا = ۰ ، لا − ا − ۵ = ۰ ۶ − ۳لا = ۴ا ، لا + ۲ا = ۲۰

۷ − ا = ۲لا − ۱ ، ۳لا + ۴ا − ۱۸ = ۰

۸ − ۲لا + ا = ۰ ، ۴لا − ۳ا + ۲۰ = ۰

۹ − ۵لا − ۲ا + ۱۵ = ۰ ، ۴لا − ۳ا + ۱۲ = ۰

۱۰ − لا − ۲ا + ۱۱ = ۰ ، ۲لا − ۳ا + ۱۸ = ۰

۱۱ − لا + ا = ۲٫۵ ، ۲ا = ۳لا − ۱۵

۱۲ − لا/۲٫۵ + ا/۳ = ۱ ، لا + ۲ا + ۴ = ۰

۱۳ − تفاعیل ۲لا − ۳ ، (۳لا − ۱۵)/۵ میں سے ہر ایک کی ترسیم بناؤ اور بنا بریں مساوات ۲لا − ۳ = (۳لا − ۱۵)/۳ کا حل دریافت کرو۔

۱۴ − ذیل کی تین مساواتوں کو حل کرنے سے ثابت کرو کہ وہ تینوں

خط جن کو یہ تعبیر کرتی ہیں ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں، خط کھینچنے سے اس کی تصدیق کرو

۲لا - ما - ۸ = ۰
۴لا + ۲ما - ۶ = ۰
۲لا + ۳ما = ۰

۱۵- ثابت کرو کہ تین مستقیم خط جو ذیل کی تین مساواتوں سے تعبیر ہوتے ہیں ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں، اس نقطہ کے محدد معلوم کرو اور عمل ترسیمی سے اپنے جواب کی تصدیق کرو۔

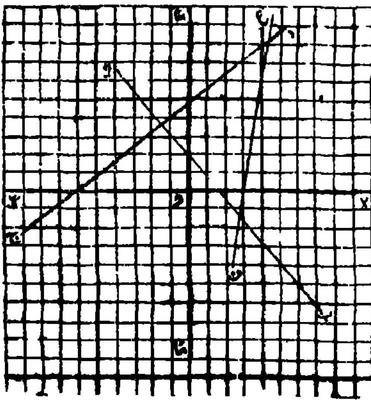
۹ما = ۵لا + ۲۵، ۵لا + ۲ما + ۱۰ = ۰، لا + ۲ما = ۱۱

۱۶- ایک ہی محور اور اکائیاں استعمال کرنے سے لا - ۲ما + ۴ = ۰، لا + ما + ۱ = ۰، ۵لا - ما - ۷ = ۰ کی ترسیمیں بناؤ اور ان کی مدد سے ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

(۱) لا - ۲ما + ۴ = ۰، لا + ما + ۱ = ۰
(۲) لا - ۲ما + ۴ = ۰، ۵لا - ما - ۷ = ۰
(۳) لا + ما + ۱ = ۰، ۵لا - ما - ۷ = ۰

۱۷- سوال ۱۶ کے خطوط سے جو مثلث بنتا ہے اس کے راسوں کے محدد معلوم کرو۔

۱۸- ایک مثلث کے اضلاع کی مساواتیں لا - ما + ۱ = ۰، لا - ۴ما + ۷ = ۰، لا + ۲ما - ۱۱ = ۰ ہیں، ترسیمی طریق سے اس کے راسوں کے محدد معلوم کرو۔



۱۹- ساتھ کی شکل میں خطوط ا ب، ج د، ع ف کھینچے گئے ہیں، ان کی مساواتیں معلوم کرو اور ہر خط پر ایک نقطہ لینے سے اپنے جواب کی تصدیق کرو۔

۲۰- اُن خطوط مستقیم کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطوں کے ازدواج

ذیل میں سے گزرتے ہیں۔

(۱) (۳، ۵)، (۳، -۷) (۲) (۶، ۷)، (-۲، ۷)

(۳) (۳، ۳)، (-۵، -۵) (۴) (۰، ۲$\frac{1}{۲}$)، (۲$\frac{1}{۲}$، ۰)

(۵) (۵، ۶)، (-۵، -۳) (۶) (۶، -۴)، (-۷، -۳)

(۷) (۳، -۲)، (-۲، ۵)

۲۱ـ ذیل کو مرتسم کرو اور ہر صورت میں ترسیم کی مساوات معلوم کرو

لا =	۳	۱	۱٫۲	۱٫۵	۳٫۳
ما =	۵	$\frac{۵}{۳}$	۲	۲٫۵	۵٫۳

۲۲ـ

لا =	۳	۰	۱٫۵	-۳$\frac{۳}{۴}$	۸
ما =	۴٫۵	$\frac{۵}{۲}$	۳٫۵	۰	۷$\frac{۵}{۶}$

۲۳ـ ثابت کرو کہ تین نقطے (۳، -۱)، (-۲، ۴)، (۵، -۳) ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں، اس خط کی مساوات معلوم کرو، نیز معلوم کرو کہ یہ محاور لا، ما سے کہاں ملتا ہے۔

۲۴ـ ایک مثلث کے راس (۰، ۰)، (۲، ۴)، (-۶، ۸) ہیں مثلث کے اضلاع اور انکے وسطی خطوط کی مساواتیں معلوم کرو۔

۲۵ـ ایک مثلث کے راس (۰، ۰)، (۲، ۴)، (-۶، ۴) ہیں، اضلاع اور وسطیوں کی مساواتیں معلوم کرو۔



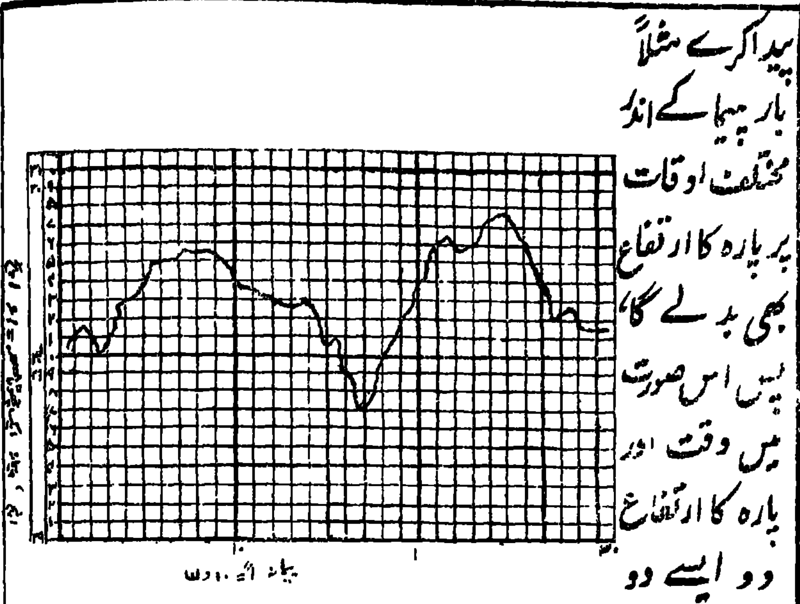
باب سوم

خطی کلیہ اور عام ترسیمیں

۴۲ - ما = ۲ لا + ۳ کی ترسیم بناتے وقت ہم نے دیکھا کہ لا اور ما متغیر ہیں اور باہم اس طرح متعلق ہیں کہ ایک کی کسی قیمت کے جواب میں دوسرے کی ایک متناظر قیمت ہے یا ایک کی قیمت میں کوئی تبدیلی دوسرے میں ایک متناظر تبدیلی پیدا کرتی ہے۔ نیز ان دو متغیروں کو بلحاظ دو محوروں کے مرتسم کرنے سے ہم نے ایک خط حاصل کیا جس میں لا، ما کی تمام متناظر قیمتیں فقط دیکھنے سے معلوم ہوسکتی ہیں اور اس بناء پر ترسیم کو صرف دیکھنے ہی سے یہ معلوم ہوسکتا ہے کہ اِن دو متغیروں میں سے کسی ایک کے بڑھنے یا گھٹنے سے دوسرا متغیر بھی بڑھتا یا گھٹتا ہے، پس ما = ۲ لا + ۳ کی ترسیم ایک ایسا خط ہے جس کے ذریعہ دو متعلقہ متغیرات لا، ما کے باہمی ربط کو ہندسی یا ترسیمی طریق پر ظاہر کیا گیا ہے۔

اب ضروری نہیں کہ یہ متغیر ایک خطی مساوات کی مجہول مقداریں ہی ہوں، متغیّر کوئی ایسی مقدار ہے جو بدلے جیسے وقت، حیدرآباد کی آبادی، بارپیما میں پارہ کا ارتفاع، وغیرہ وغیرہ - ایسی کوئی دو بدلنے والی عام مقداریں باہم اس طرح متعلق ہوسکتی ہیں کہ ایک کی قیمت میں کوئی تبدیلی دوسری میں ایک متناظر تبدیلی

پیدا کرے مثلاً
بار پیما کے اندر
مختلف اوقات
پر پارہ کا ارتفاع
بھی بدلے گا،
پس اس صورت
میں وقت اور
پارہ کا ارتفاع
دو ایسے دو



متغیر ہیں جو باہم
متعلق ہیں، ان کی متناظر قیمتوں کے کئی جوڑے ہونگے، اگر وقت
کو فصلہ اور متناظر ارتفاع کو معیّن مان کر نقطے مرتسم کئے جائیں تو
ان نقطوں میں سے ایک خط گزرے گا جو وقت اور ارتفاع کے
باہمی ربط کو ترسیمی طریق پر ظاہر کریگا دیکھو شکل بالا۔

عام طور پر یاد رہے کہ اگر کوئی دو مقداریں
(۱) بدلتی ہوں یعنی مختلف قیمتیں اختیار کرسکیں
(۲) اور ان کی قیمتیں باہم متعلق ہوں یعنی ایک کی قیمت
دوسری کی قیمت پر منحصر ہو

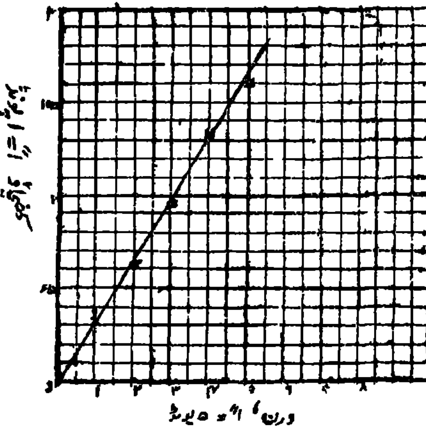
تو ان کے باہمی ربط کو ہم ترسیمی طریق پر ظاہر کرسکتے ہیں، یہ
ضروری نہیں کہ ایسی مقداریں کسی مساوات سے یا حساب لگانے سے
معلوم ہوں، اکثر اوقات یہ تجربہ اور مشاہدہ سے حاصل ہونگی۔

اب ایسا ممکن ہے کہ دو متعلقہ مقداروں کی متناظر قیمتوں کو مرتسم کرنے سے جو نقطے حاصل ہوں وہ ایک مستقیم خط پر واقع ہوں یعنی ان مقداروں کا باہمی ربط ترسیمی طریق پر ایک مستقیم خط سے تعبیر ہو سکے، اِس کو ہم یوں بیان کرینگے کہ ان مقداروں میں **خطی کلیہ یا قانون** پایا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ ایک لوہے کی کمانی انتصابی سمت میں ایک ثابت نقطہ سے لٹکائی گئی ہے اور اس کے طول کو ناپ لیا گیا ہے، اس کے بعد اس کے دوسرے سرے سے اوزان ایک پونڈ، ۲ پونڈ، ۳ پونڈ... ۷ پونڈ بالترتیب لٹکائے گئے ہیں اور ہر صورت میں کمانی کے طول کا اضافہ یعنی کھنچاؤ احتیاط سے ناپا گیا ہے، وزن اور کھنچاؤ کی قیمتیں جدول ذیل میں مندرج ہیں

وزن پونڈوں میں	۰	۱	۲	۳	۴	۵	...
کھنچاؤ	۰	۳۲ء	۶۲ء	۹۵ء	۱ء۲۱	۱ء۶	...

کسی وزن کو فصلہ اور اسکے متناظر کھنچاؤ کو معیّن مان کر ساتھ کی شکل میں نقطے مرتسم کئے گئے ہیں، یہ سب کے سب تقریباً ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں جو مبدأ میں سے گزرتا ہے خفیف سا تفاوت جو نظر آرہا ہے اُس کا باعث پیمائش کی غلطی ہے۔



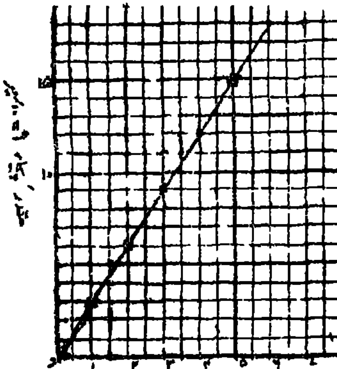
پس وزن اور کھنچاؤ میں خطی کلیہ پایا جاتا ہے جسکی ہندسی تعبیر شکل میں موجود ہے
اگلی تین دفعات میں ہم خطی کلیہ پر چند مثالیں حل کریں گے۔
ان میں بالعموم دو متعلقہ متغیرات کی متناظر قیمتوں کے جوڑے حساب لگانے سے یا مشاہدہ یا تجربہ کی بنا پر معلوم ہونگے، ان کو مرتسم کرنے سے کئی نقطے حاصل ہوں گے جن میں سے ایک مستقیم خط گزرے گا جو ترسیمی طریق پر ان متغیرات کے باہمی ربط کو ظاہر کرے گا، نیز ہم اس مستقیم خط کی مساوات بھی معلوم کر سکینگے دیکھو دفعہ ۲۰، یہ مساوات ان متغیروں کے ربط کی جبریہ صورت ہوگی۔

۴۴۔ علم حساب کی اکثر مثالیں ترسیمی طریق پر حل ہوسکتی ہیں لیکن اس طرح انکے جوابات محض تقریبی ہوتے ہیں، اکثر اوقات انکے حل کرنے کے حسابی طریقے نہایت صاف اور مختصر ہوتے ہیں اور اس لحاظ سے قابل ترجیح ہیں، مگر ترسیمات کی مزید توضیح کیلئے ہم اس جگہ حساب کی چند مثالیں ترسیمی طریق پر حل کریں گے۔
ہمیں خرید و فروخت کے معاملات میں روزانہ ایسی مقداروں سے واسطہ پڑتا ہے جو متغیر خیال کی جاسکیں اور باہم متعلق ہوں مثلاً شکر ایک روپیہ کی تین سیر آتی ہے، اس سے یہ مراد ہے کہ یہ ۲ روپے کی ۶ سیر آئیگی، ۸ آنے کی $1\frac{1}{2}$ سیر اور بالعموم ق روپوں کی م سیر، دیکھو جدول ذیل

قیمت روپوں میں	۱	۲	$2\frac{1}{2}$	۳	۴	$5\frac{1}{2}$	....	ق
مقدار سیروں میں	۳	۶	$7\frac{1}{2}$	۹	۱۲	$16\frac{1}{2}$	.....	م

اب چونکہ شکر کی قیمت کے ساتھ ساتھ اس کی مقدار بھی بدلتی ہے اس لئے ہم ان دونوں کو ایسے متغیر خیال کر سکتے ہیں جو باہم متعلق ہیں اور علاوہ ازیں ہم دیکھتے ہیں کہ کسی دو قیمتوں کی نسبت بالترتیب اُن کی متناظر مقداروں کی نسبت کے مساوی ہے۔ مثلاً ۲ اور $5\frac{1}{2}$ کوئی دو قیمتیں ہیں جن کی نسبت $\frac{2}{5\frac{1}{2}}$ یعنی $\frac{4}{11}$ ہے۔ ان کی متناظر مقداریں بالترتیب ۶ اور $16\frac{1}{2}$ ہیں جن کی نسبت $\frac{6}{16\frac{1}{2}}$ یعنی $\frac{12}{33}$ یا $\frac{4}{11}$ ہے، طالب علم کوئی اور زوج لیکر دیکھے کہ کسی دو قیمتوں کی نسبت ان کی متناظر مقداروں کی نسبت کے مساوی ہے، اس ربط کو ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ شکر کی قیمت اور مقدار متناسب ہیں یا اُن میں سیدھا تناسب ہے۔

اب جدولِ بالا میں شکر کی قیمتوں کو فصلہ اور متناظر مقداروں کو معین مان کر ہم نقطے مرتسم کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ یہ سب کے سب نقطے ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوتے ہیں، دیکھو ساتھ کی شکل۔



اب جبکہ شکر کی قیمت اور مقدار میں سیدھا تناسب تھا تو ہمیں معلوم ہوا کہ انکے تغیرات کو ظاہر کرنے والی ترسیم ایک مستقیم خط ہے۔ ہم بالعموم درست پائیں گے کہ جب کسی دو متعلقہ متغیروں میں سیدھا تناسب ہو تو اس طرح سے اُن کی جو ترسیم حاصل ہوگی وہ

ایک مستقیم خط ہوگی۔

شکل بالا کا خطِ مستقیم شکر کی قیمت اور مقدار کے باہمی ربط کو ترسیمی طریق پر ظاہر کرتا ہے، اس ربط کی جبریہ صورت جدول بالا سے ق = $\frac{م}{۲}$ ہوگی (جہاں ق قیمت ہے اور م مقدار) کیونکہ کسی دو قیمتوں کی نسبت ان کی متناظر مقداروں کی نسبت کے مساوی ہے، پس یہ جبریہ ربط م = ۲ ق ہوا، طالب علم اس سے بخوبی مانوس ہے کیونکہ اگر قیمت لا اور مقدار ما ہوتی تو یہ مساوات ما = ۲ لا ہوتی جو مبدأ میں سے گزرنے والے ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔

تعریف۔ بالعموم فرض کرو کہ کوئی دو متغیر ا اور ب ہیں جو باہم متعلق ہیں اور ا کی کسی دو قیمتوں $ا_۱$ اور $ا_۲$ کے جواب میں ب کی متناظر قیمتیں $ب_۱$ اور $ب_۲$ ہیں، اب اگر $\frac{ا_۱}{ا_۲} = \frac{ب_۱}{ب_۲}$ یعنی ا کی کسی دو قیمتوں کی باہمی نسبت ب کی متناظر قیمتوں کی نسبت کے مساوی ہو تو مختصراً ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ ا اور ب متناسب ہیں یا ان میں سیدھا تناسب ہے۔

علم حساب کے اکثر سوالات ایسی مقداروں پر مشتمل ہوتے ہیں جن میں سیدھا تناسب ہو مثلاً

(۱) کسی شے کی قیمت اور مقدار۔ ایک مثال اوپر حل کی گئی ہے

(۲) فاصلہ اور وقت۔ ایک ریل گاڑی ایک گھنٹے میں ۳۰ میل جاتی ہے ۲ گھنٹے میں ۶۰ میل، بالعموم لا گھنٹے میں ما میل یعنی $\frac{۱}{لا} = \frac{۳۰}{ما}$ یا ما = ۳۰ لا، مساوات درجہ اول، ترسیم مستقیم خط۔

(۳) سود۔ ۱۰۰ روپیہ کا سود ایک سال میں ۵ روپیہ، ۲۰۰ روپیہ کا

۱۰ روپیہ اور لا روپیہ کا ما روپیہ تب ۱۰/لا = ۵/ما یعنی ما = ۱/۲ لا، مساوات درجہ اول کی ترسیم مستقیم خط وغیرہ وغیرہ

اب ہم حساب کی چند مشکل مثالیں ذیل میں حل کرتے ہیں۔

مشق ا ۔ حیدرآباد سے ایک موٹر دن کے ۸ بجے ۲۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے بیدر کی طرف روانہ ہوئی، بیدر کا فاصلہ حیدرآباد سے ۶۰ میل ہے۔ ایک ترسیم بناؤ جس سے فاصلہ طے کردہ اور وقت کا باہمی تعلق معلوم ہو۔

ظاہر ہے کہ ۸ بجے کے ۱/۲ گھنٹہ بعد موٹر کا فاصلہ طے کردہ حیدرآباد سے ۱۰ میل ہوگا، ایک گھنٹہ کے بعد ۲۰ میل، ۲ ۱/۲ گھنٹہ کے بعد ۵۰ میل ..... اور بالعموم لا گھنٹہ کے بعد ما میل دیکھو جدول

وقت ۸ بجے کے بعد	۰	۱/۲ گھنٹہ	۱ گھنٹہ	۱ ۱/۲ گھنٹہ	۲ گھنٹہ	۲ ۱/۲ گھنٹہ	لا گھنٹہ	.....
فاصلہ طے شدہ	۰	۱۰ میل	۲۰ میل	۳۰ میل	۴۰ میل	۵۰ میل	ما میل	.....

ہم دیکھتے ہیں کہ وقت اور فاصلہ میں سیدھا تناسب ہے اس لئے ضروری ہے کہ وقت اور فاصلہ کے تغیرات کو ظاہر کرنے والی ترسیم ایک مستقیم خط ہو۔

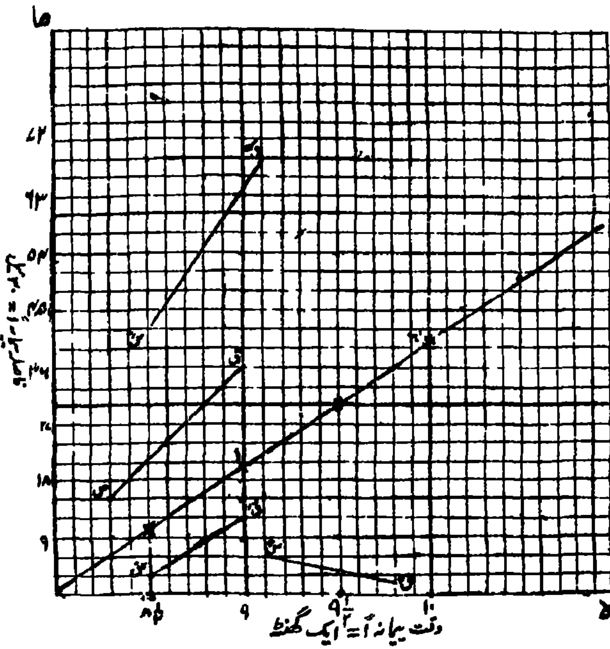
نیز چونکہ لا گھنٹہ میں ما میل فاصلہ طے ہوتا ہے اسلئے لا/(۱/۲) = ما/۱۰ یعنی ما = ۲۰ لا یعنی فاصلہ اور وقت کا باہمی ربط جبریہ طریق پر مساوات ما = ۲۰ لا سے تعبیر ہوتا ہے۔ اب چونکہ یہ ایک مساوات درجہ اول ہے اس لئے اس کی ترسیم ایک مستقیم خط ہوگی، پس فاصلہ اور وقت کا باہمی ربط ہندسی طریق پر ایک سیدھے خط سے تعبیر ہوگا۔

اس مساوات کی ترسیم حاصل کرنے کے لئے صرف دو نقطے کافی ہیں،

جب لا = ۱ تو ما = ۲۰ اور جب لا = ۲ تو ما = ۴۰

پس نقاط ا (۱، ۲۰) اور ب (۲، ۴۰) کو ملانے والا خط مطلوبہ ترسیم ہے

محور لا پر وقت کو تعبیر کرو اور فرض کرو کہ ایک انچ ایک گھنٹہ کو تعبیر کرتی ہے نیز فاصلہ طے شدہ کو



محور ھا پر تعبیر کرو اور فرض کرو کہ ایک چھوٹا حصہ ۴ میل کو تعبیر کرتا ہے۔

اس پیمانہ کے موافق ا اور ب کو مرتسم کرو۔ ب ا، ب ایسے نقطے ہیں جن میں سے ہر ایک کا فصلہ وقت کو تعبیر کرتا ہے اور معین اس فاصلے کو تعبیر کرتا ہے جو وقت مذکور پر موٹر کا حیدرآباد سے ہو

ان نقطوں کو ملانے والا خط مطلوبہ ترسیم ہے دیکھو شکل۔

اس ترسیم کو دیکھنے ہی سے معلوم کر سکتے ہیں کہ کسی خاص وقت پر موٹر کا فاصلہ حیدرآباد سے کیا ہوگا یا برعکس اس کے حیدرآباد سے کسی خاص فاصلہ پر موٹر کس وقت ہوگی۔ مثلاً ۹ بج کر ۲۰ منٹ پر موٹر حیدرآباد سے تقریباً ۲۰ میل کے فاصلہ پر ہوگی، دس بجکر ۲ منٹ کے بعد تقریباً ۴۸ میل پر، نیز ۳۵ میل پر ۹ بجکر ۴۵ منٹ کے بعد ہوگی وغیرہ وغیرہ۔

علم حساب کی مدد سے یہ امور معلوم کرنے کے لئے ہر دفعہ جداگانہ سوال حل کرنا

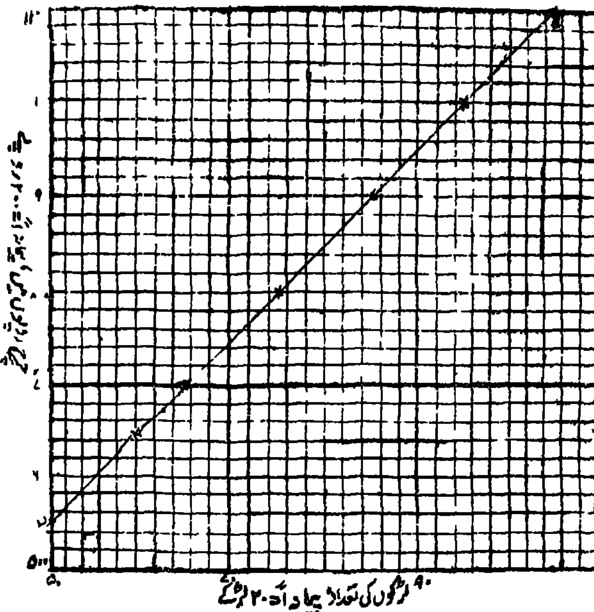
پڑتا ہے۔ مگر ترسیمات میں ایسے بیشمار سوالات محض شکل کو استعمال کرنے سے حل ہو سکتے ہیں۔ ایسی ترسیم کو حاضر شمار کے نام سے موسوم کرتے ہیں ۔ اگرچہ ترسیمی طور پر سوال حل کرنے میں پوری صحت میسر نہیں آتی تاہم اس میں جو یہ آسانی مضمر ہے کہ ہر سوال کا جواب خاص حدود کے اندر محض ترسیم کو دیکھنے سے معلوم ہو سکتا ہے اس کا لحاظ رکھتے ہوئے یہ طریقہ حساب پر فوقیت رکھتا ہے۔

نوٹ۔ ہم نے وقت کی پیمائش ۸ بجے سے شروع کی اور فاصلہ کی نقطۂ ابتدائی حیدرآباد سے گویا ہمارے موجودہ مبدأ کے محدد (۸،۰) ہیں جہاں ۸ وقت کا محدد ہے اور صفر فاصلہ کا۔ دراصل ہمیں وقت کی پیمائش رات کے بارہ بجے سے کرنی چاہیئے تھی جس صورت میں مبدأ کے محدد (۰،۰) ہوتے لیکن اس صورت میں ربع اول میں مبدأ کے پاس کا بہت سا حصہ بیکار جاتا کیونکہ ترسیم اس میں واقع نہ ہوتی ، اس لحاظ سے ہم نے نقطہ (۸،۰) کو مبدأ مان لیا یعنی مبدأ کو منتقل کرکے ہم نقطہ (۸،۰) پر لے آئے اور وقت اور فاصلہ کی پیمائشیں اس نقطہ سے کرنے لگے ۔

شکل بالا میں چند مزید ترسیمیں بنائی گئی ہیں ، جدول ذیل سے واضح ہوگا کہ ان سے جداگانہ کیا تعبیر ہوتا ہے ۔

	مقام روانگی	وقت روانگی	رفتار مع کیفیت
س ق	و سے ۱۵ میل	۸ بجکر ۱۸ منٹ	۳۰ میل فی گھنٹہ و سے
سَ قَ	و سے ۳ میل	½ ۸ بجے	۱۸ میل فی گھنٹہ و سے
سً قً	و سے ۶ میل	۹ بجکر ۶ منٹ	۶ میل فی گھنٹہ و کی جانب
سُ قُ	و سے ۱۲ میل	¼ ۸ بجے	۴۵ میل فی گھنٹہ و سے

مشق ۲۔ ایک اسکول کے دارالاقامہ کے ماہانہ اخراجات کا کچھ حصہ مستقل ہے اور باقی لڑکوں کی تعداد پر موقوف ہے ۔ ۵۰ لڑکوں کے ماہانہ اخراجات ۵۵۰ روپیہ ہیں اور ۱۰۵ لڑکوں کے ۱۱۰۰ روپے ہیں۔ ایک ترسیم بناؤ جس سے لڑکوں کی کسی تعداد کے اخراجات معلوم ہوسکیں۔ اس سے ۷۵ لڑکوں کے ماہانہ اخراجات معلوم کرو اور نیز اُن لڑکوں کی تعداد معلوم کرو جن کے اخراجات ۱۰۰۰ روپے ہیں۔



اس سے ہمیں بدیہی طور پر یہ معلوم نہیں ہوتا کہ لڑکوں کی تعداد اور اُن کے اخراجات میں سیدھا تناسب ہے تاہم اگر ہم یہ فرض کریں کہ لڑکوں کی تعداد لا ہے مستقل خرچ ب ہے اور ہر لڑکے کا ماہانہ خرچ ا ہے تو کل خرچ م = ا لا + ب

اب چونکہ ۵۰ لڑکوں کا خرچ ۵۵۰ روپیہ ہے اور ۱۰۵ کا ۱۱۰۰ روپیہ اسلئے

۵۰ ا + ب = ۵۵۰ روپے ...(۱)

۱۰۵ ا + ب = ۱۱۰۰ روپے ...(۲)

جس سے ۵۵ ا = ۵۵۰ یعنی ا = ۱۰ روپے یعنی ہر ایک لڑکے کا خرچ ۱۰ روپیہ ہے۔

ا کی اس قیمت کو مساوات (۱) میں درج کرنے سے ب = ۵۰، پس
مستقل خرچ ۵۰۰ روپے ہے۔

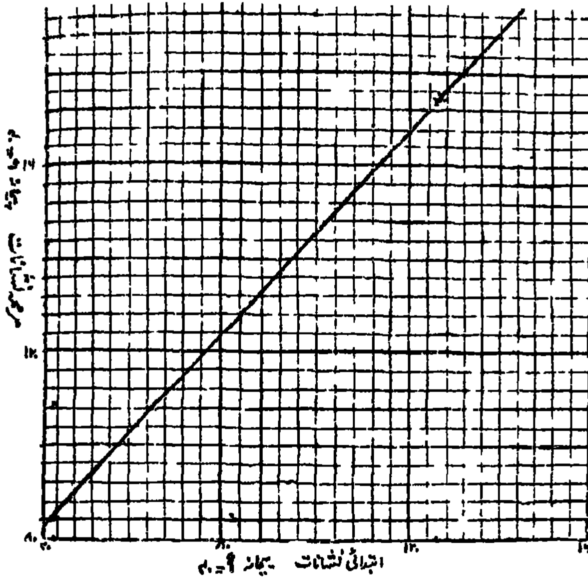
اس لئے کل ماہانہ خرچ ما اور لڑکوں کی تعداد لا میں جبریہ تعلق ما=۱۰لا+۵۰۰
ہے، یہ ایک مساوات درجہ اول ہے اس کی ترسیم صریحاً ایک خط مستقیم ہوگی۔
۲۰ لڑکوں کو محور لا پر ایک انچ سے اور ۲۰۰ روپیوں کو محور ما
پر ایک چھوٹے حصے یعنی ۱/۱۰ انچ سے تعبیر کرو۔ نیز فصلوں کو ۵۰ سے اور
معینوں کو ۵۰۰ سے ناپنا شروع کرو یعنی مبدأ کے محدد (۵۰، ۵۰۰)
فرض کرو۔

اب ما = ۱۰لا + ۵۰۰ کی ترسیم بنانے کے لئے صرف دو نقطے ن
اور ق مرتسم کرنا کافی ہوگا جن کے فصلے بالترتیب ۵۰ اور ۱۰۵ لڑکوں
کو تعبیر کرتے ہیں اور معین ۵۵۰ اور ۱۱۰۰ روپیوں کو، ان نقطوں کو
ملانے والا خط مطلوبہ ترسیم ہے۔ اس ترسیم کو محض دیکھنے سے معلوم
ہوجاتا ہے کہ ۵۷ لڑکوں کے ماہانہ اخراجات ۸۰۰ روپے ہوں گے
اور ان لڑکوں کی تعداد جن کا خرچ ۱۰۰۰ روپیہ ماہوار ہے ۹۵ ہے۔
شکل کو دیکھ کر ذیل کی جدول میں لڑکوں کی تعداد اور ان کے اخراجات
کی چند مزید مثالیں درج کی گئی ہیں۔

تعداد لڑکوں کی	۶۰	۶۵	۸۵	۹۰	....
اخراجات	۶۵۰	۷۰۰	۹۰۰	۹۵۰	....

پس دفعہ ماقبل کی طرح ایسی ترسیم کو بھی بطور حاضر شمار، استعمال کیا جاسکتا ہے
مشق ۴۳ — کسی امتحان کے پرچے جانچتے وقت ایک ممتحن نے زیادہ
سے زیادہ ۱۲۶ نشانات دیئے اور کم از کم ۴۳، اب وہ تمام پرچوں کے

نشانات کو ایک خطی کلیہ کے موافق اس طرح بدلنا چاہتا ہے کہ زیادہ سے زیادہ نشانات ۱۷۵ ہوجائیں اور کم سے کم ۸۵، بتاؤ کہ وہ اسے کس طرح کرسکتا ہے اور معلوم کرو کہ جن پرچوں کے ابتدائی نشانات ۶۵، ۸۵، ۱۰۰، ۱۱۲، ۱۲۴ تھے ان کے مرتمہ نشانات کیا ہوں گے۔

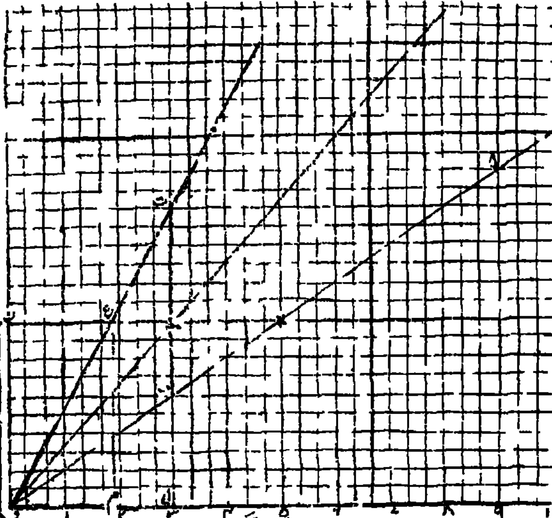


افقی محور و لا پر اصلی نشانات کو اور انتصابی محور و ما پر نئے نشانات کو ناپو اور ہر صورت میں پیمانہ ایک انچ = ۴۰ فرض کرو۔ نیز فصلوں کو ۴۰ سے اور معینوں کو ۸۰ سے ناپنا شروع کرو، دو نقاط لا = ۴۳، ما = ۸۵ اور لا = ۱۲۶، ما = ۱۷۵ کو شکل میں مرتسم کرو، ان کو ایک مستقیم خط کے ذریعہ ملاؤ، ترسیم محصلہ سے لا، ما کی متناظر قیمتیں معلوم کرو۔

اصلی نشانات	۶۵	۸۵	۱۰۰	۱۱۲	۱۲۴
نئے نشانات	۱۰۸	۱۲۹	۱۴۶	۱۵۹	۱۷۲

مشق ۴ — ایک نلی ایک حوض کو ۳ گھنٹے میں بھرتی ہے، دوسری ۵ گھنٹے میں، بتاؤ کہ دونوں مل کر حوض کو کتنی دیر میں بھر دینگی۔

فرض کرو کہ محور لا پر کا ہر ایک چھوٹا حصہ (= ۱/۱۰ انچ) ۲۰ منٹ کو ظاہر کرتا ہے اور محور ما پر ایک انچ دن پورے حوض کو تعبیر کرتا ہے۔



چھوٹی نلی جو حوض کو ۵ گھنٹوں میں بھرتی ہے اس کی ترسیم وا دو نقاط (۰،۰) اور (۵، ۱) کو ملانے سے حاصل ہوتی ہے۔

نیز بڑی نلی جو حوض کو ۳ گھنٹہ میں بھرتی ہے اس کی ترسیم نقاط (۰،۰) اور (۳، ۱) کو ملانے سے حاصل ہوتی ہے۔

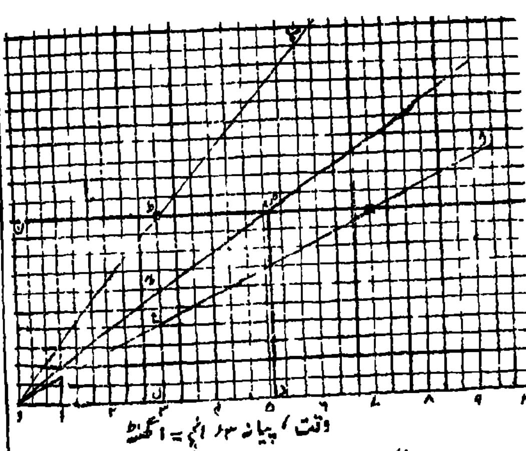
ہمیں ایک ایسی نلی کی ترسیم معلوم کرنی چاہیئے جس کا کام ان دونوں نلیوں کے مجموعی کام کے مساوی ہو۔ اُس نلی کی ترسیم پر کا ایک نقطہ (۰،۰) ہے ایک اور نقطہ معلوم کرنے کے لئے ۳ گھنٹہ کے نشان ل میں سے گزرنے والا عمود کھینچو جو چھوٹی نلی کی ترسیم وا سے ف پر ملے، اب ل ف چھوٹی نلی کا ۳ گھنٹہ کا کام ہے اور بڑی نلی کا ۳ گھنٹہ کا کام دن کے مساوی ہے، اسلئے ل ف کو ث تک اتنا خارج کرو کہ ف ث = دن

اب ل ث = ل ف + ف ث = ل ف + دن یعنی ل ث دونوں نلیوں کا تین گھنٹہ کا مجموعی کام ہے، پس نقطہ ث نئی نلی کی ترسیم پر واقع ہے، اس لئے نئی نلی کی ترسیم د ث ہے۔

اب ن سے محور لا کے متوازی ایک خط کھینچو اور فرض کرو کہ یہ و ث سے ع پر ملتا ہے، ع سے و لا پر عمود ع م نکالو، پس دونوں نلیاں دث دم میں م ع = د ن یعنی پورے حوض کو بھر دیتی ہیں۔

پس وقت مطلوبہ = و م = ۱٫۸۶ گھنٹے

اگر ایک نلی حوض کو بھرتی ہو اور دوسری خالی کرتی ہو تو اس طرح عمل کرو۔ تخصیص کی خاطر فرض کرلو کہ بڑی نلی حوض کو تین گھنٹے میں بھرتی ہے اور چھوٹی نلی اُسے ۷ گھنٹے میں خالی کر دیتی ہے، اگر دونوں ایک ساتھ کھول دی جائیں تو حوض کتنی دیر میں بھر جائے گا۔ بڑی نلی کے کام کی ترسیم و ب نقاط (۰، ۰) اور (۳، ۱) میں سے گزرتی ہے، چھوٹی نلی کے کام کی ترسیم و ا نقاط (۰، ۰) اور (۷، ۱)



میں سے گزرتی ہے، محور لا پر کے ۳ گھنٹے والے نشان ل میں سے ایک عمود کھینچو جو و ا، و ب سے بالترتیب ع اور ط پر ملے۔

بڑی نلی کا تین گھنٹے کا کام ل ط ہے جہاں ل ط = و ن، کیونکہ یہ پورے حوض کو ۳ گھنٹے میں بھر دیتی ہے۔

چھوٹی نلی ۳ گھنٹے میں حوض کا حصہ ل ع خارج کر دیتی ہے، پس اگر دونوں نلیاں کھول دی جائیں تو ۳ گھنٹے میں یہ حوض کا حصہ ع ط بھر دیگی۔

اب معیّن ل ع ط پر ل طَ کو ع ط کے مساوی قطع کرو، نقطہ طَ

ایک ایسی نلی کی ترسیم پر واقع ہے جس کا کام ان دو نلیوں کے کام کے حاصل تفریق کے مساوی ہے، پس اس نئی نلی کے کام کی ترسیم و ط ہے۔

ن میں سے ایک خط ن ص محور لا کے متوازی کھینچو جو و ط سے ص پر ملے، ص سے و لا پر عمود ص د کھینچو۔

نئی نلی حوض کا حصہ ص د یعنی و ن وقت و د میں بھرتی ہے پس و د وقت مطلوبہ ہے، اب و د = $\frac{1}{4}$ ۵ گھنٹہ تقریباً

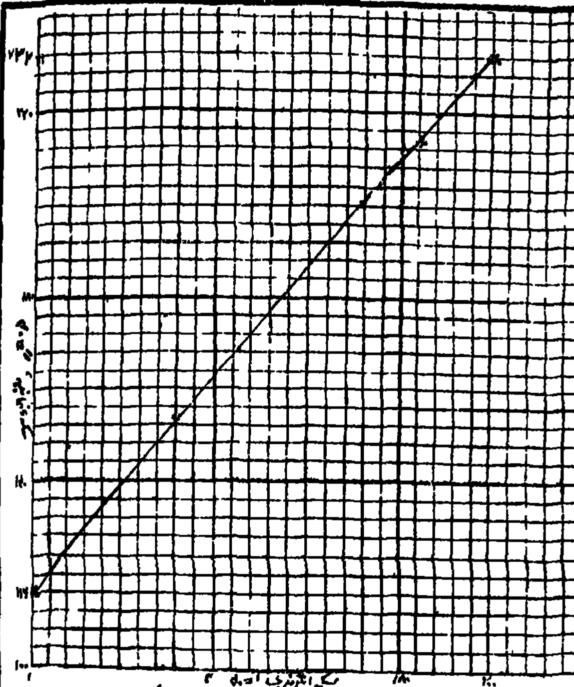
۲۵۔ تحویلی ترسیمیں۔ اکثر اوقات ہم ایک ہی چیز کو دو پیمانوں کے ذریعہ ناپ سکتے ہیں مثلاً کوئی طول انچوں کے پیمانہ سے بھی ناپا جاسکتا ہے اور سنٹی میٹروں کے پیمانہ سے بھی، اسی طرح تپش کو ناپنے کے لئے سنٹی گرید پیمانہ استعمال کیا جاسکتا ہے اور فارن ہیٹ بھی۔ اب ضروری ہے کہ اُن دو پیمانوں میں جو ایک ہی چیز کے ناپنے کے لئے استعمال کئے جائیں باہم کوئی ربط ہو، اس ربط کو ہم ترسیم کے ذریعہ ظاہر کرسکتے ہیں اور یہ ترسیم بھی حسب امثلہ دفعہ ماقبل بطور حاضر شمار استعمال کی جاسکتی ہے۔

مشق ۱۔ ۱۰۰ روپیہ انگریزی ۱۱۶ روپیہ سکہ عثمانیہ کے مساوی ہیں، ایک سو اور دو سو روپیہ کی حدود کے اندر دونوں سکوں کے باہمی ربط کو ترسیمی طریق پر ظاہر کرو۔

۱۰۰ روپیہ سکہ انگریزی = ۱۱۶ روپیہ سکہ عثمانیہ اور فرض کروکہ

لا 〃 〃 = ما 〃 〃

تب $\frac{ما}{116} = \frac{لا}{100}$ کیونکہ سکوں میں سیدھا تناسب ہے، اسلئے ما = $\frac{116}{100}$ لا سکوں کا باہمی ربط ہے۔



انگریزی روپوں کو افقی محور و لا پر اور عثمانیہ روپوں کو انتصابی محور و ما پر ناپو اور فرض کرو کہ ہر صورت میں ۴۰ روپے ایک انچ سے تعبیر ہوتے ہیں۔

نیز چونکہ ایک سو اور دو سو کی حدود کے اندر روپوں کا ربط مطلوب ہے اس لئے فصلوں اور معینوں کو ۱۰۰ سے ناپنا شروع کرو یعنی نقطہ (۱۰۰، ۱۰۰) کو مبدأ مقرر کرو۔

ترسیم پر دو نقطے (۱۰۰، ۱۱۶) اور (۲۰۰، ۲۳۲) ہیں، ان کو ملانے سے شکل میں ترسیم کھینچی گئی ہے، جدول ذیل میں انگریزی اور عثمانیہ روپوں کی چند متناظر قیمتیں درج ہیں جو اس شکل کو بطور عاملِ شمار استعمال کرنے سے معلوم کی گئی ہیں۔

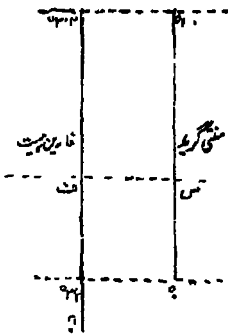
سکہ انگریزی	۱۴۴	۱۸۴	۱۳۲	.....
سکہ عثمانیہ	۱۶۷	۲۱۴	۱۵۳	...

مشق ۲ — تپش ناپنے کے پیمانہ سنتی گرید اور فارن ہیت کے باہمی ربط کو ایک ترسیم کے ذریعہ ظاہر کرو۔

فارن ہیت پر نقطہ انجماد یعنی پانی کے جمنے کا نقطہ ۳۲° سے تعبیر ہوتا ہے اور نقطہ جوش یعنی پانی کے کھولنے کا نقطہ ۲۱۲° سے۔

سنتی گرید پر نقطہ انجاد ۰° سے تعبیر ہوتا ہے اور نقطہ جوش ۱۰۰° سے

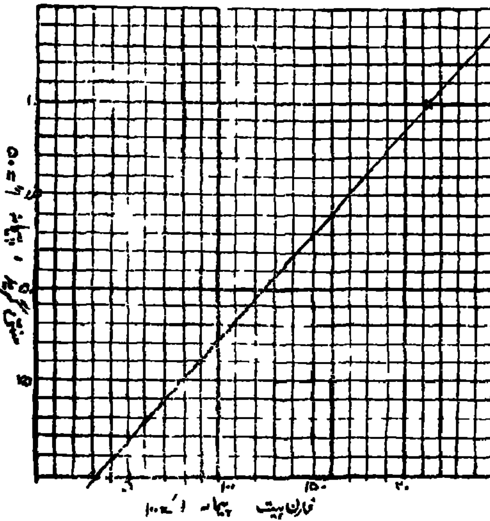
اسلیئے ۱۰۰° سنتی گرید = ۱۸۰° فارن ہیت



پس اگر کوئی تپش فارن ہیت پر ف درجوں سے تعبیر ہو اور سنتی گرید پر س درجوں سے تو ف - ۳۲ = $\frac{۱۸۰}{۱۰۰}$ س

یعنی ف = $\frac{۱۸۰}{۱۰۰}$ س + ۳۲ --- (۱)

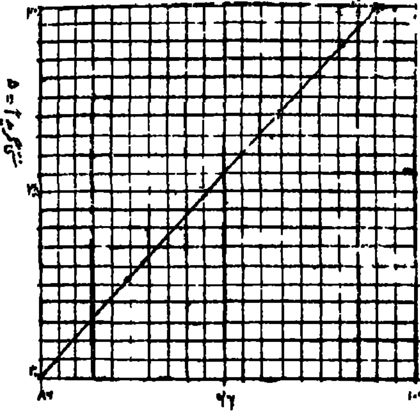
فارن ہیت کے درجوں کو افقی محور و لا پر ناپو اور اس کے ۱۰۰ درجوں کو ایک انچ سے تعبیر کرو، نیز سنتی گرید کے درجوں کو انتصابی محور و ما پر ناپو اور اس کے ۵۰ درجوں کو ایک انچ سے تعبیر کرو۔



مساوات (۱) سے دو نقاط ف = ۳۲، س = ۰ اور ف = ۲۱۲، س = ۱۰۰ حاصل ہوتے ہیں، اِن کو مرتسم کرنے اور ملانے سے شکل میں ترسیم کھینچی گئی ہے' اوپر کی شکل بہت چھوٹے پیمانہ پر بنائی گئی ہے اسلئے درجوں کی باہمی تحویل کے لئے یہ چنداں مفید نہیں ہوسکتی، طالب علم کاغذ کے بڑے تختہ پر فصلہ کے لئے پیمانہ اُ = ۵۰ اور معین کے لئے اُ = ۲۰ لیکر ترسیم بنائے۔

اگر تپش کی خاص حدود مثلاً ۹۰° ف اور ۱۰۰° ف سے یا اس کے قریب قریب کی تپشوں سے ہمیں زیادہ سروکار ہو تو بڑے پیمانہ پر شکل بنائی جا سکتی ہے جس سے زیادہ صحیح نتائج حاصل ہو سکتے ہیں -

مساوات (۱) سے س = $\frac{5}{9}$ (ف - ۳۲) اور ہم دیکھتے ہیں کہ جب



ف = ۸۶ تو س = ۳۰ اور جب ف = ۱۰۴ تو س = ۴۰، اس لئے ف کی قیمتوں کو فصلہ اور س کی متناظر قیمتوں کو معین مان کر ان دو نقطوں کو مرتسم کرو، ان کو ملانے سے ۸۶° ف اور ۱۰۴° ف کی حدود کے اندر ایک مناسب پیمانہ پر ترسیم حاصل ہوتی ہے جس کو بطور حاضر شمار استعمال کیا جا سکتا ہے، اس شکل سے ہم دیکھتے ہیں کہ ۹۰° ف، ۳۲٫۲ س اور ۱۰۰° ف، ۳۷٫۷ س کے مساوی ہے -

جدول ذیل میں ف اور س کی چند متناظر قیمتیں اس ترسیم سے حاصل کی گئی ہیں

ف	۹۰٫۸	۹۵	۹۸٫۸	۱۰۲٫۲	.....
س	۳۲٫۵	۳۵	۳۷	۳۹	....

۴۶- طبیعی مقادیر جو ایک خطی مساوات کے ذریعہ مربوط ہوں

اب تک ہمیں یا تو ترسیم کی مساوات دی ہوئی تھی یا سوال کی نوعیت

ایسی تھی کہ اس کی بنا پر متغیروں کی باہمی مساوات بآسانی معلوم ہو سکے، حسابی اور تحویلی ترسیموں میں ہم نے سوالات سے ایسی مساواتیں مرتب کیں اور ان سے بیشمار نقطے حاصل کرکے مقادیر کی ترسیمیں بنائیں، لیکن بعض اوقات متغیروں کی متناظر قیمتیں مشاہدہ یا تجربہ کی بنا پر معلوم کی جاتی ہیں، مثلاً معمل یا لیبورٹری میں متعلقہ مقادیر کی قیمتوں کے چند جوڑے تجربہ سے معلوم کئے جاتے ہیں اور یہ مطلوب ہوتا ہے کہ ان مقداروں کے باہمی ربط کی جبر یہ مساوات معلوم کی جائے۔

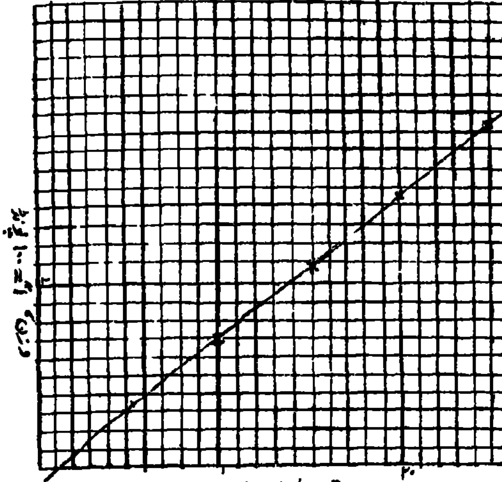
اس غرض سے ہم ان مقداروں کی متناظر قیمتوں سے نقطے مرتسم کرتے ہیں اور کئی مرتبہ ایسا ہوتا ہے کہ یہ نقطے قریب قریب ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں، اس صورت میں اگر ہم ایک ایسا مستقیم خط کھینچیں جو یکساں طور پر ان نقطوں کے بیچوں بیچ میں سے ہو کر گزرے تو اس خط کی مساوات قریب قریب ان مقداروں کے باہمی ربط کو تعبیر کرے گی لیکن یہ ربط صرف ان حدود کے اندر صحیح خیال کیا جا سکتا ہے جن کے اندر تجربہ کیا گیا ہے۔

مشق ا ۔ ایک مشین کے ذریعہ مختلف وزنوں کو اٹھانے کے لئے جو قوتیں درکار ہوتی ہیں وہ جدول ذیل میں درج ہیں

قوت، ق	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰
وزن، و	۳۲	۷۰	۱۰۸	۱۴۶	۱۸۳	۲۲۲

ق اور و کی متناظر قیمتوں سے نقطے مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ ق اور و کے باہمی ربط کو ہم ق = ا × و + ب سے تعبیر کر سکتے ہیں جہاں ا اور ب

مستقل مقداریں ہیں، نیز ا اور ب کی قیمتیں دریافت کرو۔ قوت کو بطور فصلہ اور وزن کو بطور معین ناپو قوت کے لئے ۱۰ پونڈ کو ا انچ سے تعبیر کرو اور وزن کے لئے ۱۰۰ پونڈ کو ا انچ سے تعبیر کرو



اس طرح نقاط (۵، ۳۲)، (۱۰، ۷۰) ..... وغیرہ وغیرہ کو مرتسم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ سب کے سب ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جو عین مبداء میں سے نہیں گزرتا۔ پس ہم جائز طور پر فرض کر سکتے ہیں کہ ق اور و میں ربط ق = او + ب موجود ہے جہاں ا، ب مستقل مقداریں ہیں اس مساوات میں ق اور و کی بجائے بالترتیب ۵ اور ۳۲ درج کرنے سے

۵ = ا × ۳۲ + ب ..... (۱)

نیز ق اور و کی بجائے بالترتیب ۲۰، ۱۴۶ لکھنے سے

۲۰ = ۱۴۶ ا + ب ..... (۲)

مساوات (۱) اور (۲) سے ا = $\frac{۵}{۳۸}$ اور ب $\frac{۱۵}{۱۹}$

پس مساوات مطلوبہ جو قوت اور وزن کے باہمی ربط کو ظاہر کرتی ہے

ق = $\frac{۵}{۳۸}$ و + $\frac{۱۵}{۱۹}$ یعنی ۵ و ـ ۳۸ ق + ۳۰ = ۰ ہے

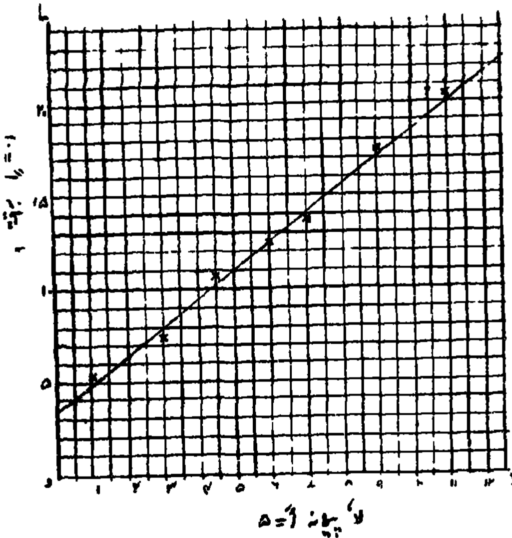
مشق ۲ ـ ایک مقدار لا کی قیمتوں کے جواب میں ایک اور مقدار ما کی تقریبی قیمتیں تجربہ کی بنا پر معلوم کی گئی ہیں، یہ قیمتیں جدول ذیل میں

درج ہیں

لا	۱	۳	۴٫۵	۶	۷	۹	۱۱	۱۳
ما	۵٫۲	۷٫۵۷	۱۰٫۷۴	۱۲٫۵	۱۳٫۸۷	۱۷٫۳	۲۰٫۴	۲۳٫۴

لا، ما کی قیمتوں کے ان جوڑوں سے نقطے مرتسم کرو، یہ تسلیم کرکے کہ لا، ما میں ربط ما = ا لا + ب موجود ہے ا اور ب کی قیمتیں معلوم کرو۔

لا کی قیمتوں کو محور لا پر پیمانہ ۱ انچ = ۵ کے مطابق اور ما کی قیمتوں کو محور ما پر پیمانہ ۱ انچ = ۱۰ کے مطابق ناپنے سے نقطے مرتسم کرو، یہ نقطے قریب قریب ایک خط مستقیم کے گرد واقع ہوتے ہیں، اب ایک کالے



تاگے کو تان کر رکھنے سے وہ خط مستقیم حاصل کرو جو یکساں طور پر ان نقطوں کے بیچ میں سے ہو کر گزرے،

معلوم ہوتا ہے کہ اس خط پر ذیل کے دو نقطے واقع ہیں

لا = ۶، ما = ۱۲٫۵ اور لا = ۱۱، ما = ۲۰

پس ربط ما = ا لا + ب میں انہیں مندرج کرنے سے

۱۲٫۵ = ۶ ا + ب اور ۲۰ = ۱۱ ا + ب

تفریق کرنے سے ۷ء۵ = ۵ ا یعنی ا = ۱ء۵

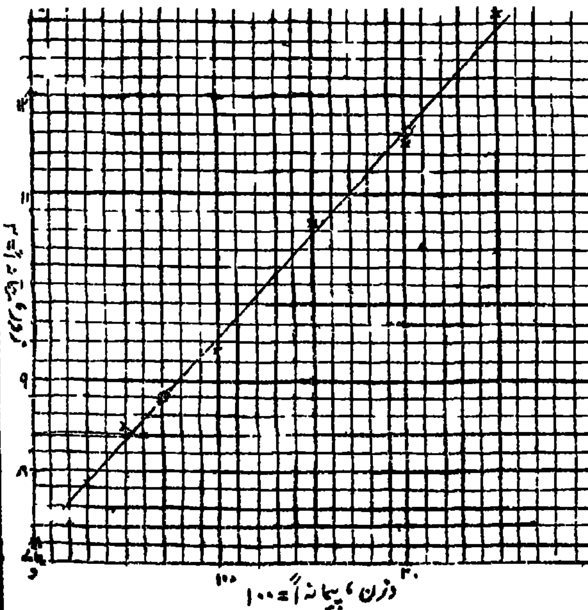
اسلئے ۱۲ء۵ = ۶ × ۱ء۵ + ب پس ب = ۳ء۵

پس مطلوبہ ربط ی = ۱ء۵ لا + ۳ء۵ ہے۔

مشق ۳ ۔ عمل میں ایک کرین یا حمالہ کے ذریعہ وزن اٹھاتے وقت جو کرین کے دستہ پر عموداً زور لگانا پڑتا ہے اس کی قیمتیں ناپی گئی ہیں اور جدول ذیل میں درج ہیں

وزن، و	۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۲۵۰	۳۰۰
زور، ز	۷ء۲	۸ء۴	۹ء۳	۱۰ء۷	۱۱ء۵	۱۲ء۸۳	۱۳ء۹

وزن اور زور کا باہمی ربط دریافت کرو



وزنوں کو افقی محور پر پیمانہ ایک انچ = ۱۰۰ اور زوروں کو انتصابی محور پر پیمانہ ایک انچ = ۲ کے موافق ناپو۔ فصلوں کو صفر اور معینوں کو ۷ سے ناپنا شروع کرو۔ وزن اور زور کی متناظر قیمتوں سے نقطے مرتسم کرکے کالے تاگے کے ذریعہ ایک مستقیم خط کا مقام معلوم کیا گیا ہے جو

یکساں طور ان نقطوں کے بیچوں بیچ میں سے ہو کر گزرتا ہے -

فرض کرو کہ اس خط کی مساوات ز = ا و + ب ہے جہاں ا اور ب مستقل مقداریں ہیں - اب ہم دیکھتے ہیں کہ اس خط پر دو نقطے ہیں

و = ۷۰ ، ز = ۸۸ ؛ اور و = ۱۸۰ ، ز = ۱۱۲٫۲ ہیں

جن کو مساوات میں درج کرنے سے ۸۸ = ۷۰ ا + ب اور ۱۱۲٫۲ = ۱۸۰ ا + ب

تفریق سے ۲۴٫۲ = ۱۱۰ ا یعنی ا = ۰٫۲۱۸ اور ب = ۷۲٫۷ تقریباً

پس مطلوبہ ربط ز = ۰٫۲۱۸ × و + ۷۲٫۵ ہے -

امثلہ نمبری ۶

۱ - گیہوں کا نرخ ۵ سیر فی روپیہ ہے اور چاولوں کا ۳ سیر فی روپیہ ، ہر صورت میں نرخ کا ترسیمی حاصر شمار ۱۰ اور ۲۰ سیر کی حدود کے اندر بناؤ اور معلوم کرو کہ ½ ۵ روپیہ کے کتنے چاول آئیں گے ، نیز بتاؤ کہ ۱۳ سیر گیہوں کی کیا قیمت ہوگی -

۲ - ایک شخص کی رہائش اور خوراک وغیرہ کے اخراجات ایک ہوٹل میں ۱۵ روپے ۸ آنہ فی ہفتہ ہیں ، اس کو ترسیمی طریق پر ظاہر کرو -

۳ - ۳۰ نارنگیوں کی قیمت ۶ روپیہ ۴ آنہ ہے ، ایک سے ساٹھ تک نارنگیوں کی کسی تعداد کی قیمت ترسیم کے ذریعہ ظاہر کرو اور اس سے معلوم کرو کہ ۲۷ نارنگیوں کی کیا قیمت ہوگی اور ۹ روپے ۷ آنہ کی کل ثابت نارنگیاں کتنی آئیں گی -

۴ - ایک کمرہ کا طول ۱۸ فٹ اور عرض ½ ۱۶ فٹ ہے ، اور اس کے

اندر فرش لگانے کی کل لاگت ۳۲۵ روپے ہے، جن کمروں کے رقبے ۱۵′ × ۱۲′ اور ۴۵′ × ۳۴′ کے درمیان ہیں اُن کے اندر فرش لگانے کی قیمت کا حاضر شمار مرتب کرو، نیز ۲۱′ × ۱۹′ کمرہ کے اندر فرش لگانے کی قیمت ترسیم سے معلوم کرو۔

۵ — یہ فرض کرکے کہ چند جسم ایک سڑک پر یکساں رفتار سے حرکت کرتے ہیں، ایک ہی شکل میں ذیل کے معطیات کی بناء پر اُن کی حرکتوں کی ترسیمیں بناؤ

مقام روانگی	وقت روانگی	رفتار
د	۶ بجے صبح	۵ میل فی گھنٹہ د سے
د سے ۳ میل	۸ بجے صبح	۳ میل فی گھنٹہ د سے
د سے ۱۱ میل	۴ بجے شام	۴½ میل فی گھنٹہ د کی طرف

۶ — ایک شخص صبح کے ۷ بجے ۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلنا شروع کرتا ہے، اس کی حرکت کی ترسیم بناؤ اور شکل سے معلوم کرو کہ وہ کس وقت مقام ابتدائی سے ۲۲ میل کے فاصلہ پر ہوگا اور ۲ گھنٹہ ۲۰ منٹ میں کس قدر فاصلہ طے کرے گا۔

۷ — ایک ریل گاڑی ۱½ گھنٹہ میں یکساں رفتار سے ۴۵ میل طے کرتی ہے، اس کی حرکت کی ترسیم بناؤ، اس سے معلوم کرو کہ کتنے وقت میں یہ ۱۷ میل طے کرے گی اور ۱۲ منٹ میں کتنا فاصلہ طے ہوگا۔

۸ — ایک جسم ۳ فٹ فی سکنڈ کی رفتار سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور ت سکنڈوں کے بعد اُس کی رفتار ۳ + ۲ ت ہوتی ہے، اس کی رفتار کی ترسیم بناؤ اور اس سے معلوم کرو کہ ۳، ۵و۴، ۳و۶، ۷ سکنڈوں کے بعد

بالترتیب اُس کی رفتار کیا ہوگی، نیز معلوم کرو کہ کس وقت اس کی رفتار ۵ء۵، ۹ء۷، ۱۱ء۲، ۱۳ء۲ فٹ فی سکنڈ ہوگی۔

۹۔ دو شخص صبح کے ۶ بجے مقامات ا اور ب سے ایک دوسرے کی طرف بالترتیب ۴ اور ۳ میل کی رفتار سے چلنا شروع کرتے ہیں، ا اور ب کا باہمی فاصلہ ۲۵ میل ہے، ترسیم بنانے سے معلوم کرو کہ وہ کب اور کہاں ایک دوسرے سے آملیں گے، ½ ۸ بجے اُن کے درمیان کیا فاصلہ ہوگا۔ اور اُن کا درمیانی فاصلہ ۶ میل کس وقت ہوگا۔

۱۰۔ دو جہاز ابتداءً ایک دوسرے سے ۸۰ میل کے فاصلہ پر ہیں اور ایک دوسرے کی طرف ۹ اور ۱۱ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے آنا شروع کرتے ہیں، ترسیم بنا کر دیکھو کہ وہ کب ایک دوسرے سے آملیں گے۔

۱۱۔ صبح کے ۷ بجے ا، ۴ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلنا شروع کرتا ہے اور اس کے آدھ گھنٹہ بعد ب، ۶ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے اُسی سمت میں چلتا ہے، ترسیمی طریق پر معلوم کرو کہ ب، ا کو کہاں اور کس وقت جا ملیگا

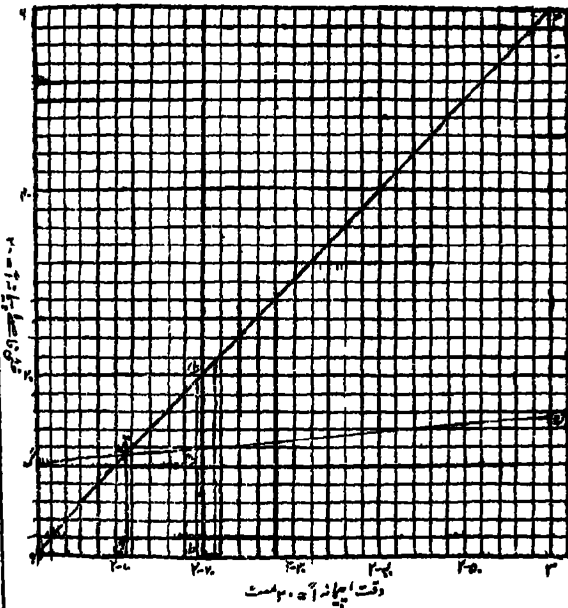
۱۲۔ ا صبح کے ۶ بجے ۳ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلنا شروع کرتا ہے اور ہر تین میل کے بعد آدھ گھنٹہ آرام کرتا ہے۔ ب صبح کے ۹ بجے ۵ میل فی گھنٹہ کی مسلسل رفتار سے ا کا پیچھا کرتا ہے، معلوم کرو کہ ب، ا سے کب اور کہاں جا ملیگا۔

۱۳۔ ایک سائیکل سوار صبح کے ۶ بجے حیدرآباد سے روانہ ہوکر بیدر کی سڑک پر ۱۱ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے مسلسل ½ ۲ گھنٹے سفر کرتا ہے، اس کے بعد وہ آدھ گھنٹہ آرام کرکے ۹ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے واپس آتا ہے، ایک دوسرا سائیکل سوار ½ ۷ بجے صبح ۷ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے حیدرآباد سے

روانہ ہوتا ہے۔ بتاؤ کہ وہ دونوں کب اور کہاں ملیں گے۔

۱۴۔ دو سائیکل سوار ایک گول چکر کے گرد جس کا محیط ایک میل ہے $\frac{1}{2}$۱۰ میل اور ۱۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک ہی نقطہ سے ایک ہی سمت میں روانہ ہوتے ہیں، بتاؤ کہ وہ ۳ گھنٹے میں ایک دوسرے سے کتنی دفعہ اور کہاں ملیں گے۔

۱۵۔ بتاؤ کہ ۲ اور ۳ بجے کے درمیان گھڑی کی سوئیاں کب (۱) ایک دوسرے پر منطبق ہونگی اور (۲) ایک دوسرے سے ۴۵° اور ۹۰° کے زاویے بنائیں گی۔



ظاہر ہے کہ جب چھوٹی سوئی ۵ منٹ فاصلے طے کرتی ہے تو بڑی سوئی پورا چکر لگالیتی ہے یعنی ۶۰ منٹ فاصلے طے کرتی ہے، گویا ایک گھنٹے میں بڑی سوئی چھوٹی سوئی کی نسبت ۵۵ منٹ فاصلے زیادہ چلتی ہے۔

افقی محور پر وقت کو تعبیر کرو اور فرض کرو کہ ایک چھوٹا حصہ (= $\frac{1}{10}$ انچ) ۲ منٹ کو ظاہر کرتا ہے۔ نیز چونکہ ہمیں ۲ بجے اور ۳ بجے کے درمیانی وقت

سے سروکار ہے اسلئے ہم ۲ بجے کو ابتدائی نقطہ سے تعبیر کرتے ہیں۔
انتصابی محور پر فرض کرو کہ ایک چھوٹا حصہ ۲ منٹی فاصلوں کو ظاہر کرتا ہے
اب چونکہ ۲ بجے بڑی سوئی نشان ۱۲ پر ہے اور ۶۰ منٹ میں یعنی ۳ بجے
تک ۶۰ منٹی فاصلے طے کرتی ہے اسلئے ۲ بجے اور ۳ بجے کے درمیان اسکی
ترسیم وم نقاط (۲،۰) اور (۳، ۶۰) کو ملانے سے حاصل ہوتی ہے نیز چونکہ ۲ بجے گھنٹے کی سوئی ۱۲ بجے
کے نشان سے ۱۰ منٹی فاصلوں پر ہوگی اور ۶۰ منٹ میں صرف ۵ منٹی فاصلے
طے کرے گی اس لئے اس کی ترسیم خط گ ن نقاط (۲، ۱۰)، اور (۳، ۱۵)
کو ملانے سے حاصل ہوگی۔ یہ دونوں خط نقطہ ق پر قطع کرتے ہیں، پس
نقطہ ق کا فصلہ ول اس وقت کو ظاہر کرتا ہے جب گھڑی کی سوئیاں ایک
دوسرے پر منطبق ہونگی۔ ترسیم کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ سوئیاں ۲ بجکر ۱۰٫۹
منٹ پر ایک دوسرے پر منطبق ہونگی۔
نیز جب کوئی سوئی ۶۰ منٹی فاصلے طے کرتی ہے تو ۳۶۰° کے زاویہ میں
سے گزرتی ہے اسلئے ظاہر ہے کہ جب ۲ بجے کے بعد سوئیوں کے درمیان
۴۵° کا زاویہ ہوگا تو بڑی سوئی چھوٹی سوئی سے $\frac{1}{2}$ ۷ منٹی فاصلے آگے
ہوگی۔ اب افقی محور پر نقطہ ط جو ۲ بجکر قریباً ۱۹٫۹ منٹ کو ظاہر کرتا ہے
ایسا ہے کہ اس کے معینوں ط طؔ اور ط طؒ کا فرق $\frac{1}{2}$ ۷ منٹی فاصلوں کے
برابر ہے، اس لئے ۲ بجکر ۱۹٫۹ منٹ کے بعد گھڑی کی سوئیوں میں ۴۵°
کا زاویہ بنے گا۔

اسی طرح ۹۰° کا زاویہ ۲ بجکر ۲۱٫۸ منٹ پر بنے گا۔

۱۶ ۔ بتاؤ کہ ۷ بجے اور ۸ بجے کے درمیان گھڑی کی سوئیاں کب (۱) ایک
دوسرے کے مقابل ہونگی (۲) ان کا درمیانی فاصلہ ۵ منٹی نشانوں کے

مساوی ہوگا۔

۱۷۔ ایک نالی ایک حوض کو ۲۰ منٹ میں بھرتی ہے، دوسری ۲۴ منٹ میں، بتاؤ کہ دونوں مل کر (۱) آدھے حوض کو (۲) پورے حوض کو کتنی دیر میں بھرینگی، نیز معلوم کرو کہ ۶ منٹ میں حوض کا کتنا حصّہ بھر جائے گا۔

۱۸۔ ایک نالی ایک حوض کو ۴ گھنٹے میں بھر سکتی ہے اور دوسری ۶ گھنٹے میں، پہلی نالی کو دوسری نالی کے ایک گھنٹہ پہلے کھولا گیا ہے، بتاؤ کہ دونوں ملکر پورے حوض اور $\frac{3}{4}$ حوض کو کتنی دیر میں بھرینگی۔

۱۹۔ ایک حوض کو ۲ نلیاں ۳ اور ۴ گھنٹے میں جدا جدا بھر دیتی ہیں، ایک تیسری نلی اُس کو پانچ گھنٹے میں خالی کر دیتی ہے، بتاؤ کہ اگر تینوں نلیوں کو ایک ساتھ کھول دیا جائے تو حوض کتنی دیر میں بھر جائے گا۔

۲۰۔ ا ایک کام کو ۱۱ دن میں اور ب $6\frac{1}{4}$ دن میں کرتا ہے، بتاؤ کہ وہ دونوں ملکر کتنے دنوں میں کرینگے۔

۲۱۔ ا، ب، ج ایک کام کو بالترتیب ۸، ۱۰، ۱۲ دن میں کرتے ہیں ابتدا میں ا اور ج ملکر دو دن کام کرتے ہیں اور پھر ب شریک ہو جاتا ہے بتاؤ کہ اور کتنے دنوں میں کام ختم ہوگا۔

۲۲۔ ایک شخص نے ایک گھوڑا ۷۰ روپے کو فروخت کرکے ۲۰ فیصد نقصان اُٹھایا، بتاؤ کہ اس نے گھوڑا کتنے کو خریدا تھا۔

۲۳۔ ایک دستکار نے کسی دوکاندار کے پاس ایک چیز فروخت کرکے ۱۰ فیصد نفع اٹھایا اور دوکاندار نے اس پر ۲۵ فیصد نفع اُٹھاکر اس کو ۱۳۲ روپے میں فروخت کیا۔ بتاؤ کہ اُس چیز پر اصلی لاگت کیا آئی تھی۔

۲۴۔ ۵ روپے ۸ آنہ فی سیر والی چائے ۳ روپے ۴ آنہ فی سیر والی

چائے کے ساتھ کس نسبت سے ملائی جائے کہ آمیزہ کی قیمت ۴ روپے ۱۲ آنہ فی سیر ہو۔

۲۵ — ایک امتحان میں حاصل کردہ نشانات زیادہ سے زیادہ ۱۶۰ ہیں اور کم سے کم ۶۵، ان نشانوں کو اس طرح کم کیا جائیگا کہ ۱۶۰ کی بجائے ۱۰۰ ہوجائیں اور ۶۵ کی بجائے ۵۰، ایسا کرنے کے لئے ایک ترسیم بناؤ اور اس سے قریب ترین صحیح عدد تک معلوم کرو کہ جن پرچوں کے نشانات ۱۳۵، ۸۷، ۹۲ تھے وہ اب کیا ہو جائیں گے۔

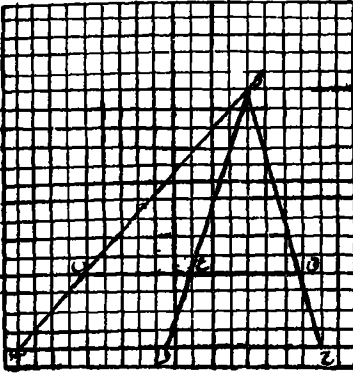
۲۶ — ایک گراموفون مع ۵ توؤں کے ۷ پونڈ میں آتا ہے، اسی گراموفون کی قیمت مع ۲۰ توؤں کے ۹ پونڈ ہے، بتاؤ کہ گراموفون مع ۵۰ توؤں کے کتنے میں آئے گا۔ [سول سروس]

۲۷ — انچ اور سنٹی میٹر، پونڈ اور کلوگرام کے باہمی ربط کو ترسیمی طریق پر ظاہر کرو، معلوم ہے ایک انچ = ۲٫۵۴ سنٹی میٹر اور ایک کلوگرام = ۲٫۲ پونڈ، شکل سے معلوم کرو کہ ۶٫۳ سنٹی میٹر، ۹٫۵ سنٹی میٹر کتنے انچوں کے مساوی ہیں، نیز ۸ پونڈ کتنے کلوگراموں کے مساوی ہے۔

۲۸ — ۶۲٫ میل = ایک کلو میٹر، ان کے باہمی ربط کو ایک ترسیم کے ذریعہ ظاہر کرو، ۴۱۵ اور ۵۵۰ میل کو کلو میٹروں میں بیان کرو، جواب قریب ترین دسویں کلو میٹر تک صحیح ہو۔

۲۹ — رومر تپش پیما میں نقطۂ انجماد صفر درجہ پر ہوتا ہے اور نقطۂ جوش ۸۰ درجہ پر، فارن ہیٹ میں نقطۂ انجماد ۳۲ درجہ پر ہوتا ہے اور نقطہ جوش ۲۱۲ درجہ پر، رومر اور فارن ہیٹ کے درجوں کی باہمی تحویل کے لئے ترسیم بناؤ، ۶۵° کو ف، درجوں میں منتقل کرو اور ۵۷° ف کو سما درجوں میں۔

۳۰ - ایک مثلث ا ب ج کے قاعدہ کے متوازی کئی خط کھینچو، ا کو مقابل کے ضلع کے وسطی نقطہ د سے ملاؤ، یہ وسطی ا د سب متوازیات کی تنصیف کرتا ہے، فرض کرو کہ ایک متوازی ن ق ہے اور اس کا وسطی فاصلہ ا سے ا ع ہے تو وسطی



فاصلوں کو بطور فصلہ اور متوازیات کے طولوں کو بطور معین مان کر نقطے مرتسم کرو اور ترسیم بنانے سے ثابت کرو کہ متوازیات کے طول اپنے وسطی فاصلوں کے متناسب ہیں، ترسیم سے اُس متوازی کا طول معلوم کرو جس کا فاصلہ ا سے $\frac{۳}{۴}$ انچ ہو۔

۳۱ - ترسیمی طریق پر ثابت کرو کہ ایک دائرہ کا رقبہ اس کے نصف قطر کے مربع کے متناسب ہوتا ہے۔

کئی دائرے مربع دار کاغذ پر بناؤ، مربعے گننے سے ان کے رقبے معلوم کرو، محور لا پر (نصف قطر)^۲ کی قیمتیں اور محور ما پر ان کے متناظر دائروں کے رقبے ناپو وغیرہ وغیرہ۔

۳۲ - ایک سرپیچ کے ذریعہ مختلف وزن اُٹھانے میں جو قوتیں لگانی پڑتی ہیں وہ تجربہ کے ذریعہ معلوم کی گئی ہیں اور حسب ذیل ہیں۔

وزن پونڈوں میں	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰
قوت	۰٫۵۶	۱٫۱۵	۱٫۵۸	۲٫۳۴	۲٫۹	۳٫۲۵

ان کو مرتسم کرنے سے دیکھو کہ قوت اور وزن قریب قریب متناسب ہیں،

معلوم کرو کہ ۴۵ پونڈ وزن کو اُٹھانے کے لئے کیا قوت درکار ہوگی۔

۳۳ — ایک مشین میں مختلف وزنوں کو اُٹھانے کے لئے جو زور درکار ہوتے ہیں ان کی قیمتیں جدول ذیل میں دی گئی ہیں۔

[وزن اور زور]

وزن، و	۵۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
زور، ز	۱۰۶	۱۲۲	۱۵۲	۱۸۴	۲۱۶	۲۴۶	۲۷۸

ان قیمتوں سے نقطے مرتسم کرو اور یہ مان کر کہ وزن اور زور میں خطی کلیہ ز = ا و + ب پایا جاتا ہے، ا اور ب کی قیمتیں معلوم کرو۔ ترسیم سے اور نیز مساوات سے قریب ترین صحیح عدد تک ز کی قیمت معلوم کرو جب و = ۳۵۰ اور و کی قیمت معلوم کرو جب ز = ۱۵۸ [سول سروس]

۳۴ — چرخیوں کے ایک نظام میں زور اور وزن کا باہمی ربط معلوم کرنے کے لئے تجربہ کی بناء پر اعداد ذیل حاصل کئے گئے ہیں۔

وزن، و	۷	۱۴	۲۱	۲۸	۳۵	۴۲	۴۹	۵۶	۶۳
زور، ز	۳٫۸	۵٫۸۴	۸٫۲	۱۰٫۱۱	۱۱٫۹	۱۴٫۵۶	۱۶٫۵	۱۸٫۵	۲۰٫۸

دیکھو کہ ز اور و میں خطی کلیہ ز = ا و + ب موجود ہے یا نہیں، اگر ہو تو ا اور ب کی بہترین قیمتیں معلوم کرو۔

۳۵ — لا اور ما کی قیمتیں تجربہ کی بنا پر معلوم کی گئی ہیں، ان میں سے بعض قدرے غلط ہیں، ان کے ربط کو ظاہر کرنے والی مناسب ترین ترسیم کھینچو۔

لا	۱	۴	۵٫۵	۷	۹٫۵	۱۱	۱۳	۱۵
ما	۳٫۵	۸	۱۰٫۷۷	۱۳	۱۵٫۲	۱۸٫۴	۲۱	۲۴٫۲

ما کی قیمت معلوم کرو جب لا = ۳٫۵ اور لا کی قیمت معلوم کرو جب ما = ۴۲

۳۶ — برقی رو کی مدد سے چلنے والے ایک پمپ کی جانچ کرنے سے نتائج ذیل حاصل ہوئے، اگر ق برقی اسپی قوت پمپ پر لگائی جائے تو ب

اسپی قوت فی الحقیقت پانی اُٹھانے میں صرف ہوتی ہے

ق	۳٫۵۷	۵٫۶۳	۷٫۸۵	۹٫۸۷	۱۱٫۷۳
ب	۱٫۵	۲٫۴۵	۴٫۳	۵٫۷	۶٫۷۵

ق اور ب کا باہمی ربط معلوم کرو۔

۴۷۔ لوہے کے ایک نل کے وزن فی فٹ جبکہ نل کی موٹائی $\frac{1}{2}$ انچ ہو جدول ذیل میں درج ہیں۔

قطر ق	۱	۱٫۵	۲	۲٫۵	۳	۳٫۵	۴	۴٫۵	۵
وزن و	۴٫۷	۹٫۸	۱۲٫۳	۱۴٫۷	۱۷٫۲	۱۹٫۶	۲۲٫۱	۲۴٫۵	۲۷

اس میں ق نل کے کھلے حصہ کا قطر ہے انچوں میں اور و وزن ہے پونڈوں میں، ایک ترسیم کھینچو جو ق اور و کے باہمی ربط کو تعبیر کرے اور اُس نل کا وزن فی فٹ معلوم کرو جس کا قطر $\frac{1}{2}$ ۳ انچ ہو۔

[سول سروس]

عام ترسیمیں

۴۷۔ پچھلی چند دفعات میں ہم نے دیکھا کہ اگر دو بدلنے والی مقداریں باہم اس طرح متعلق ہوں کہ ایک کی قیمت میں کوئی تبدیلی دوسری کی قیمت میں ایک متناظر تبدیلی پیدا کرے تو ان مقداروں کی متناظر قیمتوں کے مختلف جوڑوں سے مختلف نقطے مرتسم کئے جا سکتے ہیں اور ان نقطوں کو ایک خط کے ذریعہ ملانے سے ایک ترسیم حاصل ہوتی ہے جو ان مقداروں کے تغیرات کو ہندسی طریق پر ظاہر کرتی ہے، اوپر کی سب مثالوں میں یہ نقطے قریب ایک خطِ مستقیم پر واقع

ہوتے تھے جو ترسیمی تعبیر کی ایک خاص صورت ہے، لیکن ہم آگے چل کر دیکھینگے کہ کسی دو متعلقہ متغیروں کی متناظر قیمتوں سے جو نقطے حاصل ہوں گے وہ عام طور پر ایک خطِ مستقیم پر واقع نہیں ہوں گے بلکہ بظاہر بیقاعدہ طور پر مختلف سمتوں میں اور مختلف فاصلوں پر اوپر نیچے کہیں واقع ہوں گے۔

جب ترسیم پر کے نقطے ایک مساوات سے حاصل کئے جائیں تو وہ تعداد میں بیشمار ہونگے کیونکہ مساوات کے حل بیشمار ہیں، اس لئے اس صورت میں نقطے ایک دوسرے سے اتنا قریب ہو سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں اور نزدیک نزدیک کے نقطوں میں سے ایک مسلسل منحنی گزر سکتا ہے، پس معلوم ہوا کہ ایک مساوات کی ترسیم ہمیشہ مسلسل ہوگی۔

لیکن جب متغیروں کی قیمتیں تجربہ یا مشاہدہ کی بناپر معلوم کی جائیں تو ظاہر ہے کہ اولاً اُن کی قیمتیں بالکل صحیح نہیں ہونگی غلطی کا احتمال اُن میں ضرور باقی رہے گا، اس لئے ان قیمتوں سے جو نقطے حاصل ہوں گے اُن کے مقامات کی صحت پر ہم پورا اعتبار نہیں کر سکتے۔ دوسرے چونکہ مشاہدات کی تعداد لا انتہا نہیں ہو سکتی اسلئے ضروری ہے کہ ہمیں متناظر قیمتوں کے محدود جوڑے ملیں اور ان سے جو نقطے حاصل ہوں وہ بھی تعداد میں محدود ہوں، اس حصہ کی مثالیں اکثر اعداد و شمار اور طبعی مقادیر کے باہمی روابط پر مشتمل ہونگی۔ یہ اعداد و شمار بالعموم مشاہدہ اور تجربہ سے حاصل ہوں گے اس لئے اِنکے

متعلقہ نقطوں کی تعداد بھی محدود ہو گی، ہم دیکھینگے کہ خاصکر اعداد وشمار کے سوالوں میں ان نقطوں کی تعداد آٹھ یا دس سے شاذو نادر ہی زیادہ ہو گی۔

پس فرض کرو کہ کسی خاص سوال سے ہم نے آٹھ یا دس نقطوں کو ایک شکل میں دو قائم محوروں کے لحاظ سے مرتسم کرلیا ہے اور یہ نقطے شکل میں موجود ہیں، اب یہ سوال ہے کہ ان نقطوں کو کسی طرح ملایا جائے کہ ترسیم مطلوبہ حاصل ہو جو مقادیر زیربحث کے ربط کو صحیح طور پر ظاہر کرے۔

(۱) پہلا طریقہ یہ ہے کہ نقطوں کو بالتواتر خطوط مستقیم سے ملایا جائے۔ دو نقطوں کو ملانے سے ایک خط حاصل ہو گا اور آٹھ نقطوں کو اس طرح ملانے سے سات سیدھے خط ملینگے جو ایک دوسرے سے کوئی زاوئے بنائینگے پس ترسیم ایسی صورت میں ایک بے قاعدہ شکستہ خط ہو گی جس میں ترسیم کی سمت ہر نقطۂ مرتسمہ پر یک لخت بدلے گی، مبتدی کے لئے بہتر ہو گا کہ اعداد و شمار اور قیمتوں کی ترسیمیں بنانے میں مختلف نقطوں کو خطوطِ مستقیم کے ذریعہ ہی ملائے، کئی اخباروں میں موسم کے حالات کے متعلق چارٹ یا نقشے شائع ہوتے ہیں، ان میں وقت اور بارپیما کے ارتفاع کی متناظر قیمتوں سے جو نقطے حاصل ہوتے ہیں اُن کو بالعموم سیدھے خطوں سے ہی ملایا جاتا ہے۔

(۲) دوسرا طریقہ یہ ہے کہ اُن متعدد نقطوں میں سے ایک

سادہ ترین **مسلسل** منحنی کھینچنے کی کوشش کی جائے دفعہ ۲۱ میں ہم نے چند ایسی مثالیں حل کی ہیں جہاں مقادیر متعلقہ کو مرتسم کرنے سے جو نقطے حاصل ہوتے تھے وہ قریب قریب ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوتے تھے، ہم نے ان کے عین درمیان میں سے مناسب ترین خطِ مستقیم کھینچ کر مقداروں کے ربط کو اس سے ظاہر کیا۔ لیکن جب یہ نقطے اس طرح ایک خطِ مستقیم کے ساتھ ساتھ واقع نہ ہوں اور تعداد میں بھی محدود ہوں تو اس صورت میں اس منحنی کا معلوم کرنا جو صحیح طور پر مقداروں کے تغیرات کو تعبیر کرے ذرا مشکل امر ہے کیونکہ نقاطِ مرتسمہ کی محدود تعداد میں سے کئی منحنی گزارے جا سکتے ہیں، یہ صرف مشق پر مبنی ہے کہ کسی خاص صورت میں طالب علم ان محدود نقطوں میں سے گزرنے والے "سادہ ترین منحنی" کا انتخاب کر سکے، بہر حال تمام صورتوں میں بہترین تجویز یہ ہو گی کہ ہاتھ سے ہی ایک ایسا مسلسل منحنی کھینچنے کی کوشش کی جائے جو نقاط کے اضافی مقامات کا لحاظ کرتے ہوئے مناسب ترین ہو۔

ظاہر ہے کہ یہ منحنی بعض بعض نقطوں میں سے گزریگا اور باقی نقطے یکساں طور پر اسکے دونوں جانب واقع ہونگے۔ یہ مناسب ترین منحنی حدود ترسیم کے اندر متعلقہ مقادیر کے ربط کو اوسط درجۂ صحت تک تعبیر کرے گا اور بعض حالتوں میں ہم اسکی مساوات یعنی مقادیر کے جبر یہ ربط کو بھی معلوم کر سکینگے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ترسیم مطلوبہ حاصل کرنے کے لئے نقطہ زیر بحث
کو دو طرح سے ملایا جا سکتا ہے خطوطِ مستقیم کے ذریعہ یا ایک
مسلسل منحنی سے، لیکن ظاہر ہے کہ نقطوں میں سے گزرنیوالا
مسلسل منحنی مقداروں کے ربط کو زیادہ صحیح طور پر ظاہر کریگا
کیونکہ اس میں منحنی کا انحناء یا جھکاؤ بالتدریج کم یا زیادہ ہوگا
اور سمت کی تبدیلی اس میں دفعتہً واقع نہیں ہوگی جیسے
شکستہ ترسیم میں جو اکثر اوقات آرہ کے دندانوں کی طرح
ہوتی ہے۔ طالب علم جیسے ترسیمی تعبیر میں آگے ترقی کریگا
اسے معلوم ہوگا کہ معمولی مساواتوں کی ترسیمیں جو اکثر اوقات
عام اور طبیعی عملوں کو تعبیر کرتی ہیں صاف، بے کونہ اسلسل
منحنی ہوتی ہیں، ان میں جھکاؤ بتدریج پیدا ہوتا ہے، جب ہم
کسی طبیعی عمل یا ربط کو ترسیم کے ذریعہ ظاہر کرنا چاہیں تو یاد
رہے کہ ترسیم میں تیز زاوئے اور دندانے نہیں ہونے چاہئیں
اس صورت میں نقاطِ مرتسمہ کو سیدھے خطوط سے ملانے
کی بجائے حتی الوسع مسلسل منحنی سے ملانے کی کوشش کی
جائے، کرۂ ہوائی کی تپش اور بار پیما کے ارتفاع کو مرتسم
کرنے کے لئے کئی خود رسمی اوزار آج کل مروج ہیں، طالب
علم دیکھے کہ اِن اوزاروں کے مرتسمہ خطوط میں تیز زاوئے
اور سمت کا یک لخت بدلنا نہیں پایا جاتا۔

۲۸ — اعداد و شمار کی ترسیمیں۔ ایک ملک کی آبادی،
محاصل، اخراجات درآمد و برآمد، تعداد مدارس، تعداد طلبہ وغیرہ

سب اعداد و شمار کی مثالیں ہیں، ظاہر ہے کہ ان میں سے کسی ایک کو ایک متغیر اور وقت کو دوسرا متغیر فرض کر کے ہم ہر صورت میں ترسیم باآسانی بنا سکتے ہیں، ترسیمی تعبیر کا عملی فائدہ اور دلچسپ استعمال زیادہ اسی میں ہے کہ مختلف اعداد و شمار کی ترسیمیں بنائی جائیں اور ان سے کار آمد نتائج اخذ کئے جائیں۔

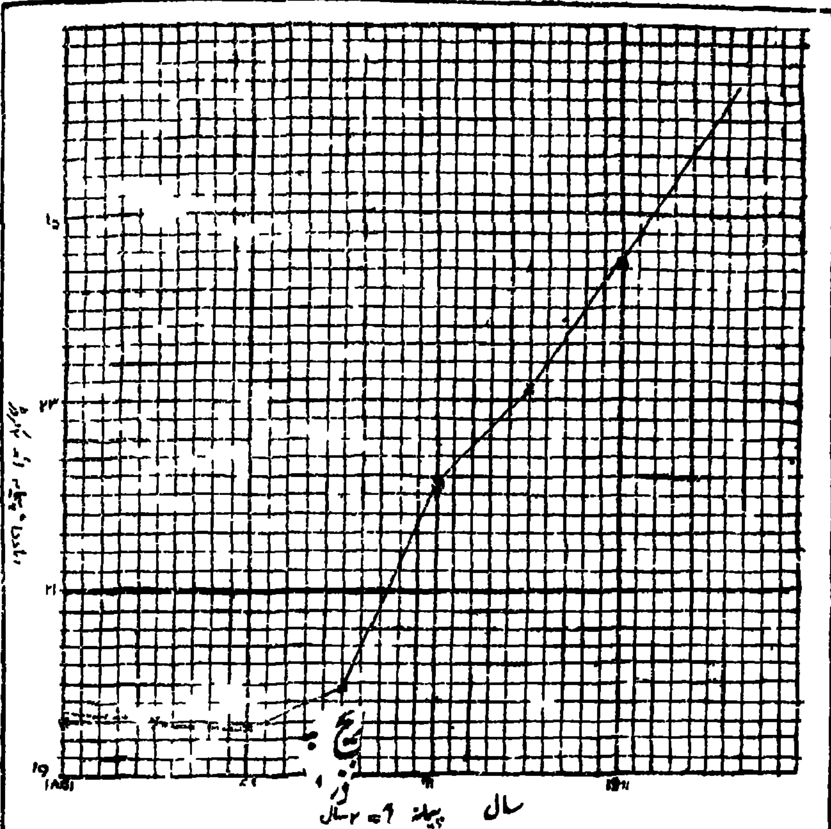
چند توضیحی مثالیں طالب علم کو ترسیمات کی اس شاخ کی دلچسپی اور اہمیت سے پورا واقف کر دینگی اور وہ ان کے استعمال سے پورا لطف اٹھا سکے گا۔

مشق ۱۔ برٹش انڈیا کی آبادی کروڑوں میں سنہ ۱۸۶۱ اور ۱۹۱۱ کے درمیان جدول ذیل میں دی گئی ہے۔

سال	۱۸۶۱	۱۸۷۱	۱۸۸۱	۱۸۹۱	۱۹۰۱	۱۹۱۱
آبادی	۱۹،۹۰۰	۱۹،۵۸۴	۱۹،۹۲۰	۲۲،۱۳۸	۲۳،۱۶۱	۲۴،۴۲۷

اس کو ترسیمی طریق پر تعبیر کرو، اگر آبادی کی کمی بیشی کی شرح دو متصل مردم شماریوں کے درمیان یکساں فرض کی جائے تو (۱) معلوم کرو کہ ۱۸۵۷، ۱۸۸۹، ۱۹۰۳ میں اس کی آبادی کیا تھی (۲) ۱۹۱۳، ۱۹۲۱ میں اس کی آبادی کیا ہو گی (۳) ترسیم کو دیکھنے سے معلوم کرو کہ اسکی آبادی ۲۶ کروڑ کب ہو گی (۴) نیز معلوم کرو کہ کن دو مردم شماریوں کے درمیان شرحِ اضافہ زیادہ سے زیادہ ہے۔

وقت یعنی سالوں کو محور x پر ناپو۔ پیمانہ ۱" = ۲۰ سال یعنی ایک چھوٹا



حصہ ۲ سال کو تعبیر کرتا ہے۔
نیز آبادی کو محور ما پر ناپو۔ پیمانہ ۱" = ۲ کروڑ اس میں ایک چھوٹا حصہ
۲ / ۱ کروڑ کو تعبیر کرتا ہے۔
ہمیں فصلوں کو ۱۸۶۱ سے ناپنا شروع کرنا چاہئے کیونکہ جدول میں
پہلی آبادی اسی سال سے شروع ہوتی ہے، لیکن چونکہ ہمیں ۱۸۵۷
کی آبادی شکل سے معلوم کرنا ہے، اس لئے فصلوں کو ۱۸۵۱ سے
ناپنا مناسب ہوگا، نیز ہمیں ۱۹۲۱ کی آبادی معلوم کرنا ہے اس لئے
شکل کے آخر میں اس کی گنجائش رکھنی چاہئے، اس لحاظ سے افقی

محور کو اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ ۱۸۵۱ سے ۱۹۲۱ تک کے تمام سال اسی میں آجائیں۔

نیز جدول میں کم سے کم آبادی ۱۹٫۰۰ کروڑ ہے، اس لئے انتصابی محور پر معینوں کو ۱۹ سے ناپنا مناسب ہو گا۔

اب ہم نقاط (۱۸۶۱، ۱۹٫۰۰)، (۱۸۷۱، ۱۹٫۵۸۴) وغیرہ کو مرتسم کرتے ہیں، اس طرح ہمیں ۶ نقطے حاصل ہوتے ہیں جنکو حسب دفعہ ۲ خطوط مستقیم کے ذریعہ ملایا گیا ہے، اس سے یہ مراد ہے کہ ہر دس سال کے عرصہ میں آبادی یکساں طور پر بڑھتی یا گھٹتی ہے۔

۱۸۵۷ کی آبادی معلوم کرنے کے لئے ترسیم کے پہلے خط کو پیچھے کی طرف نقطوں کے ذریعہ خارج کرو اور دیکھو کہ افقی محور پر جو نشان ۱۸۵۷ کو تعبیر کرتا ہے اس پر کا معین ترسیم کو تقریباً $\frac{1}{2}$ ۳ حصے افقی محور سے اوپر کاٹتا ہے، اب چونکہ معین ۱۹ کروڑ سے ناپے گئے ہیں اس لئے ۱۸۵۷ کی آبادی = ۱۹٫۶ کروڑ تقریباً، لیکن یاد رہے کہ پہلے خط کو پیچھے کی طرف خارج کرنے سے ہم نے فرض کرلیا ہے کہ ۱۸۶۱ سے پہلے چند سالوں میں آبادی کی شرح تبدیلی وہی ہے جو ۱۸۶۱ اور ۱۸۷۱ کے درمیان ہے۔

اسی طرح ۱۸۸۹ کی آبادی ۲۱٫۷ کروڑ ہے

۱۹۰۲ " ۲۳٫۴۱ کروڑ ہے

اگر یہ فرض کرلیا جائے کہ ۱۹۱۱ کے بعد بھی آبادی کے اضافہ کی شرح وہی رہے گی جو اس سے پہلے دس سالوں میں ہم نے مان لی ہے تو اس بنا پر

۱۹۱۳ میں آبادی ۲۴٫۷۸ کروڑ ہوگی

۱۹۲۱ 〃 ۲۵٫۹ کروڑ ہوگی

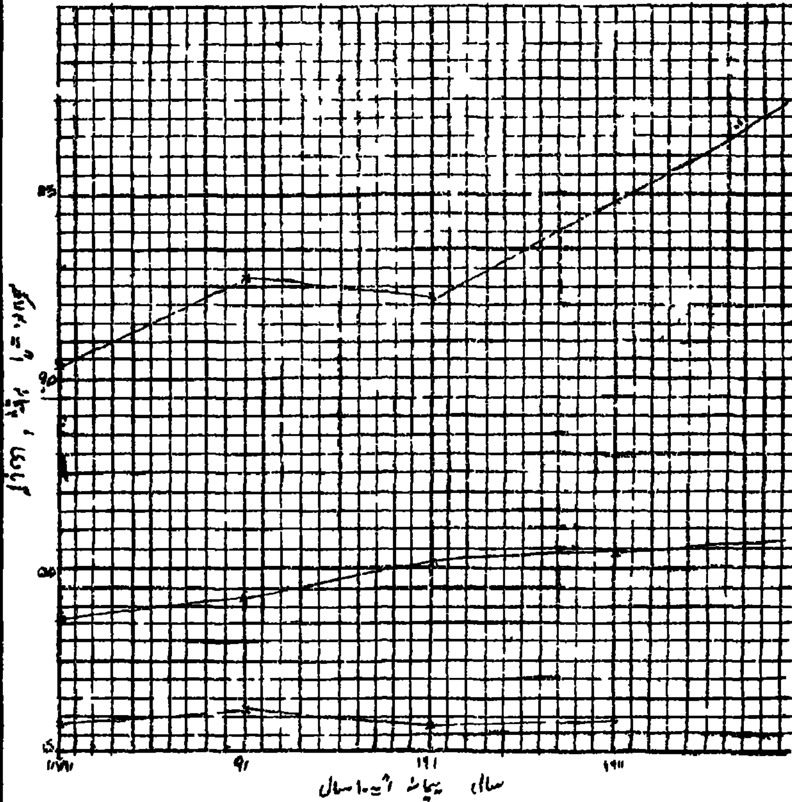
یہ معلوم کرنے کے لئے کہ ابادی ۲۶ کروڑ کب ہوگی ہم محور ما پر کے ۲۶ کروڑ والے نشان میں سے ایک خط افقی محور کے متوازی کھینچے ہیں، جہاں یہ خط ترسیم سے ملتا ہے اس نقطہ کا فصلہ مطلوبہ سال کو ظاہر کرے گا یہ فصلہ ۱۹۲۱ سے کچھ زیادہ ہے، پس ۲۶ کروڑ کی آبادی ۱۹۲۱ اور ۱۹۲۲ کے درمیان ہوگی۔

شکل کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ ۱۸۶۱ سے ۱۸۷۱ تک آبادی قریب قریب مستقل رہتی ہے کیونکہ یہ خط تقریباً افقی ہے پھر ۱۸۷۱ سے ۱۸۸۱ تک بڑھتی ہے، ۱۸۸۱ سے ۱۸۹۱ تک بہت سرعت سے بڑھتی ہے کیونکہ ان سالوں کا درمیانی خط اور خطوں کی نسبت مقابلتاً زیادہ عمودی ہے، پھر ۱۸۹۱ سے ۱۹۱۱ تک آبادی کا اضافہ قریب قریب مستقل ہے۔

مشق ۲۔ ممالک محروسہ سرکار عالی حیدر آباد دکن، ریاست میسور اور بڑودہ کی آبادیاں لاکھوں میں ۱۸۸۱ اور ۱۹۱۱ کے درمیان جدول ذیل میں دی گئی ہیں

سال	۱۸۸۱	۱۸۹۱	۱۹۰۱	۱۹۱۱
ریاست حیدرآباد دکن	۹۸٫۵	۱۱۵٫۴	۱۱۱٫۴	۱۳۳٫۷
ریاست میسور	۴۱٫۹	۴۹٫۴	۵۵٫۴	۵۸٫۴
ریاست بڑودہ	۲۱٫۸	۲۴٫۲	۱۹٫۵	۲۰٫۳

اِن اعداد کو ایک ہی شکل میں ترسیمی طریق پر تعبیر کرو اور معلوم کرو کہ (۱) ۱۸۸۵ اور ۱۹۰۸ میں تینوں ممالک کی آبادیاں کیا تھیں (۲) اگر آبادی کے اضافہ کی شرح یکساں رہے تو بتاؤ کہ ۱۹۱۵ اور ۱۹۲۱ میں انکی آبادیاں



کیا ہونگی، (۳) نیز معلوم کرو کہ ممالکِ محروسہ کی آبادی ۱½ کروڑ کب ہو جائے گی۔

سالوں کو افقی محور پر تعبیر کرو، پیمانہ اً = ۱۰ سال اور فصلوں کو ۱۸۸۱ سے ناپنا شروع کرو، آبادی کو محور ما پر ناپو، پیمانہ اً = ۴۰ لاکھ یعنی ایک چھوٹا حصہ = ۴ لاکھ اور چونکہ جدول میں سب سے چھوٹی آبادی ۱۹۰۵

لاکھ ہے اسلئے معینوں کو ۱۵ لاکھ سے ناپنا مناسب ہوگا دیکھو شکل - اسی پیمانہ کے بموجب جدول بالا کے سب نقطے مرتسم کئے گئے ہیں اور ان کو خطوط مستقیم کے ذریعہ ملانے سے آبادیوں کی ترسیمیں حاصل کیگئی ہیں ترسیم کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ

۱۸۸۵ء میں حیدرآباد کی آبادی تقریباً ۱۰۵ لاکھ تھی میسور کی ۴۷ لاکھ بڑودہ کی تقریباً ۲۲ لاکھ

۱۹۰۸ " " " ۱۲۶ " " ۵۷٫۵ " ۲۱ ½ لاکھ

۱۹۱۵ " " " ۱۴۲٫۹ لاکھ ہوگی " ۵۹٫۶ لاکھ " ۲۲ لاکھ

اگر محور ما پر کے ½ ۱ کروڑ والے نشان میں سے ایک افقی خط کھینچا جائے تو وہ ترسیم سے نقطہ د پر ملیگا د کا فصلہ مطلوبہ سال کو تعبیر کرتا ہے جو ۱۹۱۸ سے کچھ کم ہے، پس ممالک محروسہ کی آبادی ۱۹۱۸ میں ڈیڑھ کروڑ ہونی چاہئے۔

مشق ۳۔ ممالک محروسہ سرکارعالی ریاست حیدرآباد دکن کے سرکاری مدرسوں میں ۱۳۲۱ فصلی سے ۱۳۲۷ فصلی تک ہر سال کے آخر میں طلبہ کی جو تعداد تھی وہ جدول ذیل میں درج ہے۔

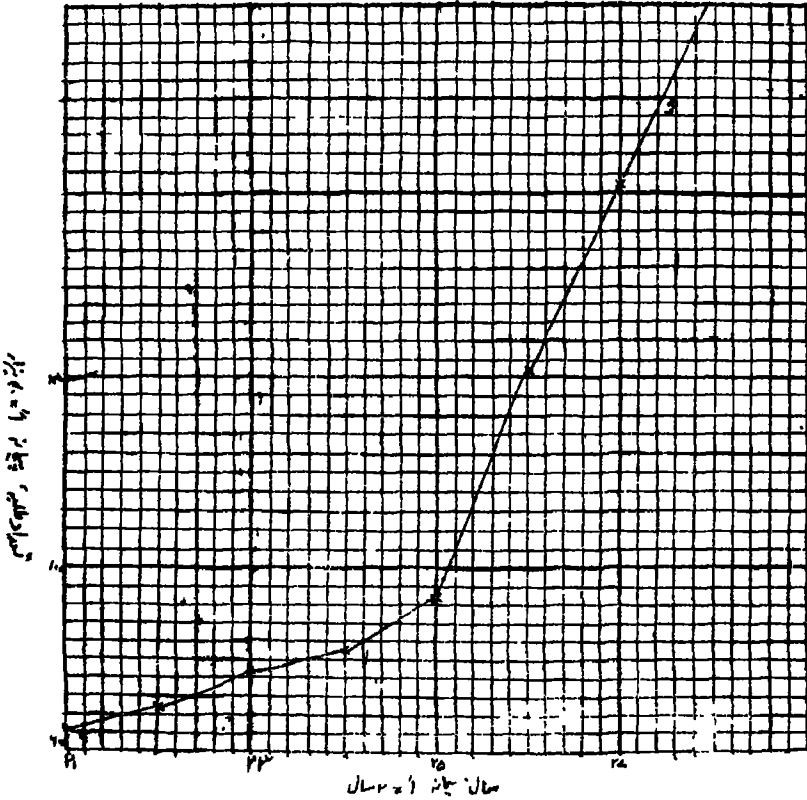
سال	۱۳۲۱	۱۳۲۲	۱۳۲۳	۱۳۲۴	۱۳۲۵	۱۳۲۶	۱۳۲۷
تعداد طلبہ	۶۵۱۰۴	۶۹۹۷۴	۷۶۵۸۲	۸۲۷۷۸	۹۳۲۸۹	۱۴۰۹۷۳	۱۸۲۹۸۷

ان اعداد کو ترسیمی طریق پر تعبیر کرو اور معلوم کرو کہ ۲ لاکھ کی تعداد کس سال میں ہوگی - نیز ترسیم کو دیکھ کر بتاؤ کہ کس سال کے دوران میں طلبہ کی تعداد میں سب سے زیادہ اضافہ ہوا۔

حسب سابق سالوں کو محور لا پر تعبیر کرو پیمانہ اً = ۲ سال، فصلوں کو ۱۳۲۱ ف سے ناپنا شروع کرو۔

تعداد طلبہ کو محور ما پر ناپو، پیمانہ ۱" = ۴۰ ہزار اور معینوں کو ۶۰ ہزار سے ناپنا شروع کرو۔

اِن پیمانوں کے موافق جدول بالا کے نقطے مرتسم کئے گئے ہیں اور اُن کو خطوطِ مستقیم کے ذریعہ ملانے سے ترسیم حاصل کی گئی ہے۔



یہ معلوم کرنے کے لئے کہ ۲ لاکھ کی تعداد کب ہوگی محور ما پر ۲ لاکھ والے نشان میں سے افقی محور کے متوازی ایک خط کھینچو جو ترسیم سے نقطہ ا پر ملے، تب نقطہ ا کا فصلہ سال مطلوبہ کو ظاہر کریگا پس ۲ لاکھ کی تعداد ۱۳۲۸ سنہ فصلی کے اختتام سے پہلے ہوجائے گی۔

کسی ایک سال مثلاً ۱۳۲۴ف میں طلبہ کی تعداد میں جو اضافہ ہوا وہ ۱۳۲۳ف اور ۱۳۲۴ف کے معیوں کے فرق سے تعبیر ہوتا ہے، پس شکل سے ظاہر ہے کہ ۱۳۲۶ف میں سب سے زیادہ اضافہ ہوا

۲۹ — قیمتیں ۔ قیمتوں کی کئی مثالیں علم حساب کے متعلق خطی کلیہ کے تحت میں اس سے پہلے آچکی ہیں، وہاں کسی چیز کی قیمت یکساں طور پر بدلتی تھی اس لئے اسکی ترسیم ایک مستقیم خط تھی، لیکن ضروری نہیں کہ کسی چیز کی مقدار اور اس کی قیمت میں سیدھا تناسب ہو یعنی قیمت یکساں طور پر بدلے کیونکہ ایسا ممکن ہے کہ کسی معیاری ناپ کی اشیاء کی تیاری میں زیادہ سہولت ہو اور اس لئے لاگت کم لگے، بر خلاف اس کے اس سے بڑے یا چھوٹے ناپ کی اشیاء کے لئے خاص طور پر اہتمام کرنے کی وجہ سے یا کئی اور وجوہات کی بناء پر نسبتاً زیادہ صرفہ اٹھانا پڑے، پس ایسی صورتوں میں جب کسی چیز کے ناپ اور قیمت میں سیدھا تناسب نہ ہو تو قیمت اور ناپ کے مختلف جوڑوں سے جو نقطے حاصل ہوں گے وہ اعداد و شمار کے نقاط کی طرح بیقاعدہ طور پر اوپر نیچے کہیں واقع ہوں گے، اگر کوئی مسلسل منحنی اِن میں سے گزر سکے تو وہ قیمت کے تغیرات کو مناسب طریق پر تعبیر کرے گا، مگر مبتدی کے لئے بہتر ہے کہ وہ ان نقاط کو بھی خطوطِ مستقیم کے ذریعہ ملائے ۔

مشق ۱ — ایک فہرست میں کپڑے رکھنے کے فولادی ٹرنکوں کی

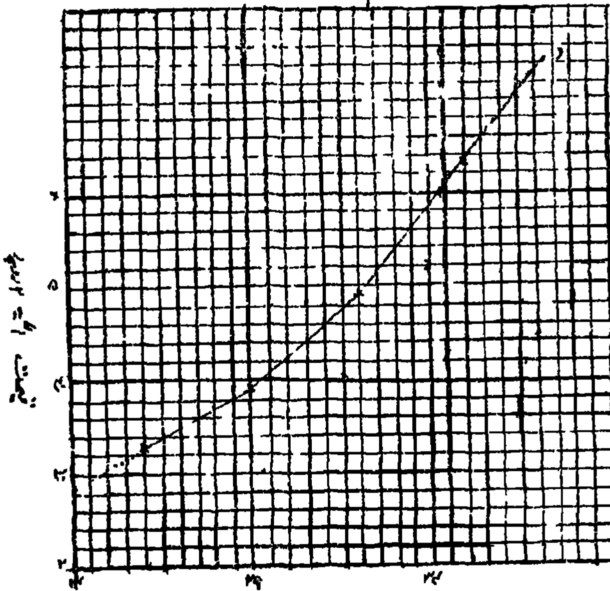
قیمتیں حسب ذیل ہیں -

ٹرنک کا طول انچوں میں	۲۶	۲۹	۳۲	۳۵
قیمت روپیوں میں	۳۲ $\frac{1}{2}$	۳۹ $\frac{1}{2}$	۴۹ $\frac{1}{2}$	۶۵ $\frac{1}{2}$

اِن کو ترسیمی طریق پر تعبیر کرو اور ۲۴، ۲۸، ۳۰، ۳۶ انچ کے ٹرنکوں کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو، نیز معلوم کرو کہ ۵۷ روپے میں جو ٹرنک آئے گا اُس کا طول کیا ہو گا۔

طولوں کو افقی محور پر ناپو، پیمانہ ایک چھوٹا حصہ = $\frac{1}{2}$ انچ ٹرنک کا طول، فصلوں کو ۲۴ سے ناپنا شروع کرو۔

قیمتوں کو انتصابی محور پر ناپو، پیمانہ ایک چھوٹا حصہ = ۲ روپے، معینوں کو ۲۰ سے ناپنا شروع کرو (۲۶، $\frac{1}{2}$۳۲)، (۲۹، $\frac{1}{2}$۳۹)،... کو مرتسم کرو اور اُن کو خطوطِ مستقیم کے ذریعہ ملاؤ۔



۲۴ انچ طول والے ٹرنک کی قیمت معلوم کرنے کیلئے پہلے خط کو پیچھے کی طرف نقطوں کے ذریعہ خارج کرو حتیٰ کہ یہ انتصابی محور سے آملے۔

نیز ۳۶ انچ طول والے ٹرنک کی قیمت معلوم کرنے کے لئے آخری خط کو ذرا آگے کی طرف خارج کرو۔

شکل کو دیکھنے سے ۲۴ انچ طول والے ٹرنک کی قیمت تقریباً ½۲۸ روپے ہے

"	۲۸	"	"	"	۳۷	"
"	۳۰	"	"	"	۴۳	"
"	۳۶	"	"	"	۶۸	"

اب ۵۰ روپے والے ٹرنک کا طول معلوم کرنے کے لئے محور ما پر کے اُس نقطہ سے جو ۵۰ روپیہ کو تعبیر کرتا ہے افقی محور کے متوازی ایک خط کھینچو جو ترسیم سے د پر ملے، د کا فصلہ طول مطلوبہ کو ظاہر کرے گا جو تقریباً ½۳۲ انچ ہے۔

بعض تاجر مختلف ناپوں کی کسی چیز کو فروخت کے لئے موجود رکھنا چاہتے ہیں، وہ پہلے مختلف ناپوں میں اُس چیز کے تین چار نمونے تیار کرتے ہیں اور اُن کی لاگت کا اندازہ کرلیتے ہیں، ان نمونوں کی بناپر ایک ترسیم بناکر وہ درمیان کے ناپوں کے لئے قیمتوں کی ایک وسیع فہرست شائع کرسکتے ہیں۔

بیمہ فنڈ اور سالیانہ وغیرہ کے سوالات میں بھی ترسیمی طریقوں کا استعمال ہو سکتا ہے۔ ہر شخص چاہتا ہے کہ اپنے ایام پیری کے لئے ایک معقول رقم جمع رکھنے کا کوئی پختہ انتظام کرسکے یا اپنی وفات کے بعد اپنی بیوی اور بچوں کے لئے کچھ سرمایہ چھوڑ جائے۔ آج کل کئی کمپنیاں اور بنک خاص شرائط پر اس قسم کا معاہدہ کرنے کے لئے تیار ہیں کہ اگر کسی خاص عمر کا کوئی شخص

ایک مقررہ معمولی رقم باقاعدہ طور پر سالانہ ادا کرنے کے لئے
تیار ہو تو وہ کمپنی اس کے عوض میں ایک بہت بڑی رقم
بوڑھے ہونے پر اسکو یکشت ادا کرے گی یا اگر وہ اس سے
پہلے کسی وقت فوت ہو جائے تو اُس کی ہدایات کے بموجب
اُس کے پس ماندگان میں سے کسی ایک کو یہی رقم یکمشت دے
دیگی۔ ایک خاص صورت میں فرض کرو کہ ۲۱ سال کی عمر کا
ایک شخص یہ انتظام کرنا چاہتا ہے کہ اگر وہ ۵۵ سال کی
عمر تک زندہ رہے تو اُس کو ۲ ہزار روپیہ کی ایک رقم یکمشت
مل جائے یا اگر وہ اِس سے پہلے کسی وقت فوت ہو جائے
تو بھی یہی رقم اُس کے بیوی بچوں کو یکمشت ادا کی جائے، وہ ایک
کمپنی کی طرف رجوع کرتا ہے جو اس کی عمر اور صحت کا تسلی
بخش طریقہ پر طبی معائنہ کرکے ایک پالیسی جاری کرتی ہے جسکی
رُو سے وہ معاہدہ کرتی ہے کہ اگر وہ شخص تاحیات یا ۵۵ سال
کی عمر تک ہر سال باقاعدہ طور پر ایک معمولی رقم مثلاً ۱۵ روپے
ادا کرتا رہے گا تو وہ رقم مذکورہ کے مطابق ۲ ہزار روپیہ ادا
کرے گی۔

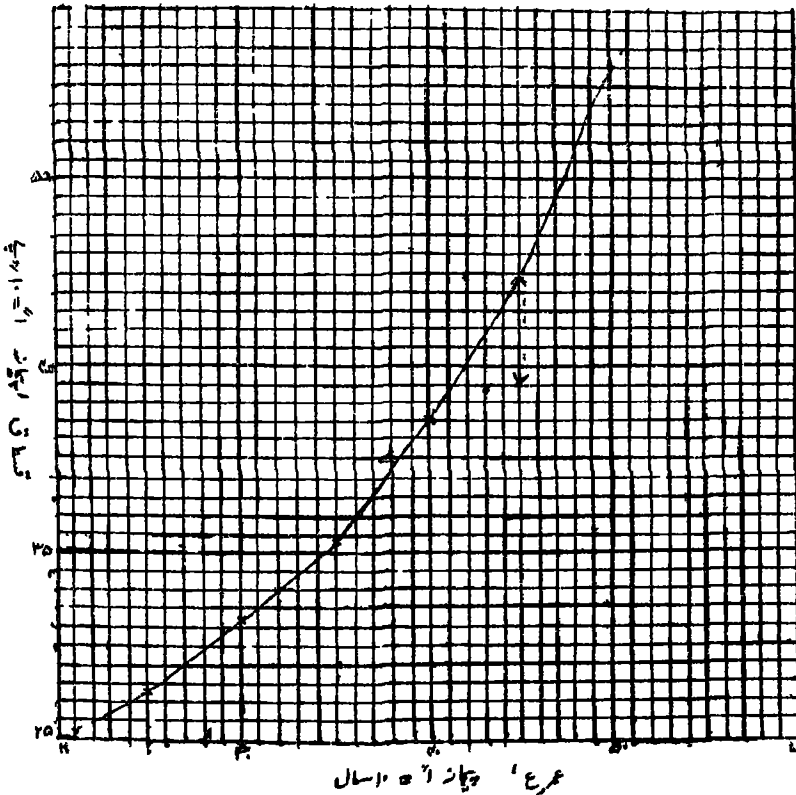
ظاہر ہے کہ سالانہ قسط کی مقدار اُس شخص کی عمر کے لحاظ سے
مقرر کی جائے گی، اگر اُس کی عمر مقابلتہً بڑی ہو گی تو ۲ ہزار روپیہ
اس طرح محفوظ کرنے کے لئے اُسے سالانہ ۱۵ روپے سے زیادہ
ادا کرنا پڑے گا۔

مشق ۲۔ کسی خاص عمر ع پر ۱۵۰۰ روپے کے واسطے جان کا

بیمہ کرانے کے لئے سالانہ قسط ق کی قیمتیں روپوں میں حسب ذیل ہیں۔

ع	۲۱	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
ق	۲۵٫۲۰	۲۷٫۴۵	۳۱٫۲۰	۳۵٫۸۵	۴۲٫۰۰	۴۹٫۹۵	۶۰٫۴۵

۲۸، ۳۲، ۳۹ سال کی عمروں کے لئے سالانہ قسطوں کی مقداریں معلوم کرو



ع کو افقی محور پر ناپو، پیمانہ ایک چھوٹا حصہ = ایک سال، فصلوں کو ۲۰ سے ناپنا شروع کرو نیز ق کو انتصابی محور پر ناپو، پیمانہ ایک

چھوٹا حصہ = ایک روپیہ، معینوں کو ۲۵ سے ناپنا شروع کرد
ان امور کے موافق جدول کے نقاط کو ساتھ کی شکل میں مرتسم کر کے
ان کو خطوطِ مستقیم کے ذریعہ ملایا گیا ہے، طالب دیکھے کہ ان
نقطوں میں سے ایک عمدہ منحنی بھی گذر سکتا ہے۔
شکل سے ظاہر ہے کہ ۲۸ سال کی عمر کیلئے سالانہ قسط تقریباً ۲۹٫۹ روپیہ ہے

" ۳۲ " " ۳۳ "

" ۳۹ " " ۴۱ "

۳۰۔ مسلسل ترسیمیں اور طبیعی سوالات میں انکا استعمال۔

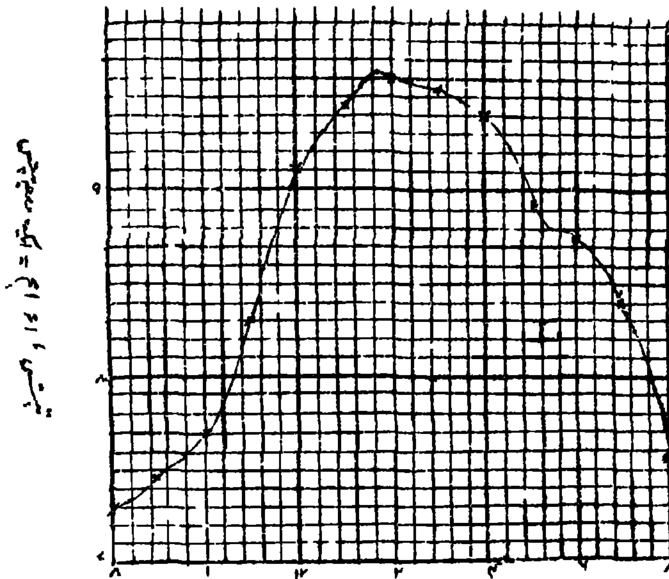
اب ہم چند ایسی مثالیں حل کریں گے جن میں نقاطِ مرتسمہ
کو صاف مسلسل منحنی خطوط سے ملانے کی کوشش کی جائیگی،
ہم پہلے بتا چکے ہیں کہ طبیعی عملوں میں خاص حدود کے
اندر تبدیلی بتدریج واقع ہوتی ہے، اس لئے اس صورت
میں ترسیم کا صاف اور بے زاویہ ہونا زیادہ مناسب ہے،
دیکھو دفعہ ۲۷

مشق ۱۔ ذیل کے معطیات کی بناپر ایک دن کے مختلف
اوقات میں تپش کے تغیرات کی ایک ترسیم بناؤ۔ جدول میں
تپش کو فارن ہیٹ پیمانہ کے مطابق بیان کیا گیا ہے

وقت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تپش	۷۳	۷۴٫۵	۷۷	۸۳	۹۱	۹۳٫۵	۹۶	۹۵٫۵	۹۴	۸۹٫۲	۸۶٫۱	۸۴	۷۵٫۸

وقت کو افقی محور پر ناپو، پیمانہ ۱" = ۴ گھنٹہ، فصلوں کو ۸ سے ناپنا

شروع کرو۔



نیز تپش کو انتصابی محور پر ناپو، پیمانہ ایک چھوٹا حصہ = ایک درجہ تپش، معینوں کو ۰۰ سے ناپنا شروع کرو۔

ان پیمانوں کے مطابق جدولِ بالا کے نقاط ساتھ کی شکل میں مرتسم کئے گئے ہیں اور ان کو حتی الوسع صاف منحنی سے ملایا گیا ہے۔

اب ہم ادراج سے درمیان کے کسی خاص وقت پر درجۂ تپش معلوم کر سکتے ہیں مثلاً ½۱۰ بجے صبح تپش تقریباً ¼۹۷ درجہ تھی اور ½۴ بجے تقریباً ۹۲ درجہ۔

نیز شکل کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ تپش ۱۱ اور ۱۲ بجے کے درمیان زیادہ سرعت سے بڑھتی رہی، ۵ اور ۶ بجے کے درمیان بہت

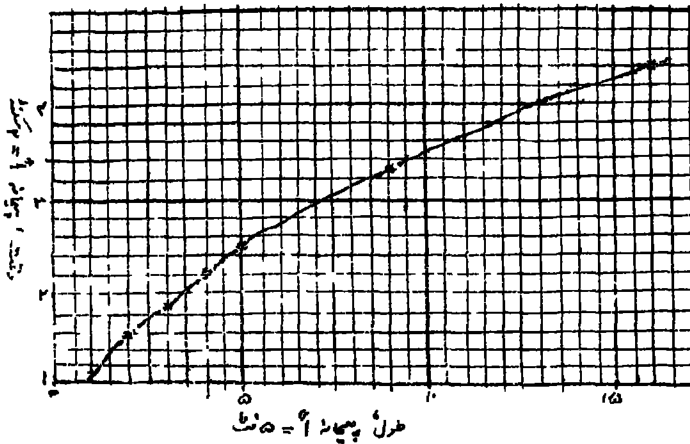
تھوڑی سی کم ہوئی، ۷ اور ۸ بجے کے درمیان بہت سرعت سے کم ہوئی زیادہ سے زیادہ تپش ایک بجے کے کچھ بعد ہوئی۔

اگرچہ تپش بعض اوقات بہت سرعت سے بڑھتی رہی ہے اور بعض اوقات آہستہ سے، تاہم یہ تبدیلی یک لخت واقع نہیں ہوئی بلکہ بتدریج ہوئی ہے، اس لئے نقطوں کو خطوطِ مستقیم سے ملانے کی بجائے مسلسل صاف منحنی سے ملانا زیادہ مناسب ہے۔

مشق ۲۔ تجربہ سے ایک رقاص کا طول اور اسکی مدتِ اہتزاز کی قیمتیں حسب ذیل معلوم کی گئی ہیں، ان کو ترسیمی طریق پر تعبیر کرو۔

طول فٹوں میں	۱	۲	۳	۴	۵	۹	۱۶
وقت سکنڈوں میں	۱٫۱	۱٫۶	۱٫۹	۲٫۲	۲٫۵	۳٫۳	۴٫۴

ترسیم سے معلوم کرو کہ ۷، ۱۱ فٹ لمبے رقاصوں کی مدتِ اہتزاز بالترتیب کیا ہوگی، اگر رقاص کی مدت اہتزاز ۲ سکنڈ ہو تو اس کا طول کیا ہوگا۔



طول کو افقی محور پر ناپو، پیمانہ ۱" = ۵ فٹ، وقت کو انتصابی محور پر ۱ سے ناپنا شروع کرو، پیمانہ ۱" = ۲ سکنڈ نقاط (۱، ۱ء۱)، (۲، ۱ء۶) وغیرہ کو مرتسم کرو اور اُن کو مسلسل منحنی کے ذریعہ ملاؤ۔

شکل کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ ۷ فٹ لمبے رقاص کی مدتِ اہتزاز ۳ سکنڈ ہے اور ۱۱ فٹ لمبے کی ۳ء۷ سکنڈ نیز جس رقاص کی مدتِ اہتزاز ۲ سکنڈ ہے اس کا طول ۳ء۲ فٹ ہے۔

امثلہ نمبری ۷

(۱) سنہ۱۳۲ء کے پہلے آٹھ ہفتوں میں سے ایک ہفتہ میں ایک تاجر نے جو نفع اٹھایا وہ جدولِ ذیل میں درج ہے۔

ہفتہ	پائی	آنہ	روپیہ
پہلا ہفتہ	۵	۸	۷۵
دوسرا "	۳	۶	۶۰
تیسرا "	۷	۹	۴۵
چوتھا "	۰	۸	۴۶
پانچواں ہفتہ	۱۱	۱۲	۶۰
چھٹا "	۸	۷	۷۵
ساتواں "	۰	۱۲	۹۰
آٹھواں "	۰	۲	۱۰۵

اِن کو ترسیمی طریق پر تعبیر کرو۔

(۲) ایک سکول کی کرکٹ ٹیم کے کپتان نے ۱۲ بازیوں (میچوں) میں حسب ذیل دوڑیں (رنز) بنائیں،

جنوری ۲۰	۷	فروری ۱۷	۱۵	مارچ ۱۷	۱۲
جنوری ۲۷	۱۰	فروری ۲۴	۲۱	مارچ ۲۴	۳
فروری ۳	۵	مارچ ۳	۰	مارچ ۳۰	۸
فروری ۱۰	۶	مارچ ۱۰	۲۵		

ایک شکل میں ان کو ترسیمی طریق پر تعبیر کرو۔

(۳) ۱۱ ہفتے کی ایک میقات میں ایک لڑکا ہر ہفتہ اپنی جماعت میں جس جس نمبر پر رہا وہ ذیل میں درج ہیں،

۷، ۶، ۱۱، ۹، ۴، ۴، ۴، ۳، ۱، ۲، ۱

ان اعداد کو ترسیم کے ذریعہ تعبیر کرو۔

(۴) ایک لڑکے کی بالترتیب گیارھویں، بارھویں ... سترھویں سالگرہ پر اس کے قد ناپے گئے اور وہ بالترتیب ۴ فٹ، ۴ فٹ ۱ انچ، ۴ فٹ ۳ انچ، ۴ فٹ ۵ انچ، ۴ فٹ ۶ انچ، ۴ فٹ ۸ انچ، ۴ فٹ $\frac{1}{2}$ انچ تھے، قد کے بڑھنے کو ترسیمی طریق تعبیر کرو اور معلوم کرو کہ $\frac{1}{2}$ ۱۴ سال کی عمر میں اُس کا قد کیا تھا۔

(۵) ممالک محروسہ سرکار عالی میں اُن طلبہ کی تعداد جو امتحان مڈل، ہائی سکول لیونگ سرٹیفکٹ، ایف اے، بی اے کے امتحانات میں ۱۹۱۲ء سے ۱۹۱۹ء تک کامیاب ہوئے ذیل کے تختہ میں دی گئی ہے۔

سال	۱۹۱۲	۱۹۱۳	۱۹۱۴	۱۹۱۵	۱۹۱۶	۱۹۱۷	۱۹۱۸	۱۹۱۹
مڈل	۲۰۱	۳۶۱	۳۵۳	۳۹۷	۷۰۲	۶۴۶	۸۸۴	۱۲۴۸
ہائی سکول لیونگ سرٹیفکٹ	...	۵۶	۹۲	۵۷	۶۳	۶۶	۹۸	۱۲۶
ایف۔ اے	۴	۵	۱۱	۸	...	...	...	۳۰
بی۔ اے	۱۴	۳	۶	۳	۴	۱۴	۵	۲

ان اعداد کو الگ الگ ترسیمی طریق پر ظاہر کرو۔

[نوٹ ریاست حیدر آباد کے متعلق جملہ اعداد و شمار تقریباً بستان آصفیہ سے لئے گئے ہیں]

(۶) ممالک محروسہ میں تعداد مساجد ۱۳۰۳ سے ۱۳۲۶ فصلی تک جدول ذیل میں دی گئی ہے:-

سال	۱۳۰۳	۱۳۰۷	۱۳۱۵	۱۳۱۸	۱۳۲۱	۱۳۲۵	۱۳۲۶
تعداد مساجد	۱۵۷۶	۱۵۸۱	۱۷۷۸	۱۸۰۴	۱۸۰۸	۱۸۵۵	۱۸۶۰

انہیں ترسیمی طریق پہ تعبیر کرو۔

(۷) ریاست حیدر آباد میں تعداد مدارس اور ٹپہ خانہ جات سرکار عالی من ابتداء ۱۳۱۷ فصلی تا ۱۳۲۷ فصلی جدول ذیل میں مندرج ہے:-

سال	۱۳۱۷	۱۳۱۸	۱۳۱۹	۱۳۲۰	۱۳۲۱	۱۳۲۲	۱۳۲۳	۱۳۲۴	۱۳۲۵	۱۳۲۶	۱۳۲۷
تعداد مدارس سرکاری	۹۳۰	۹۶۰	۱۰۳۴	۱۰۳۶	۱۰۵۲	۱۰۶۶	۱۰۹۴	۱۱۶۹	۱۴۵۴	۲۵۶۹	۳۲۲۴
ٹپہ خانہ جات	۳۰۶	۳۴۲	۳۷۳	۳۸۶	۴۱۳	۴۴۷	۴۷۲	۵۳۰	۵۵۱	۵۸۲	۶۱۷

انکو ترسیمی طریق پہ الگ الگ مرتسم کرو اور معلوم کرو کہ

(۱) سرکاری مدرسوں کی تعداد ۵ ہزار کب ہو جائے گی۔

(۲) ٹپہ خانہ جات تعداد میں ایک ہزار کب ہو جائینگے۔

(۸) ۳۱۔امرداد ۱۳۲۴ فصلی سے ۳۱ امرداد ۱۳۲۹ فصلی تک انجمن ہائے اتحادی کی تعداد مع تعداد اراکین اور کل سرمایہ جدول ذیل میں مندرج ہے:-

سال	۱۳۲۴	۱۳۲۵	۱۳۲۶	۱۳۲۷	۱۳۲۸	۱۳۲۹
انجمنیں	۲۵	۵۴	۲۹۵	۶۱۷	۹۸۹	۱۲۵۲
اراکین	۶۰۸	۱۶۹۷	۶۲۵۵	۱۵۱۹۳	۲۴۰۳۳	۳۰۹۱۲
سرمایہ	۱٬۶۸٬۵۶۸	۳٬۵۱٬۰۹۵	۱۱٬۰۰٬۶۵۷	۲۸٬۵۸٬۱۶۰	۴۸۶۳۵۴۴	۶۲۷۸۸۱۲

ان اعداد کو الگ الگ مرتسم کرو اور معلوم کرو کہ انجمنوں کی تعداد ۱۵۰۰ کب ہوگی اور کل سرمایہ ایک کروڑ کب ہو جائیگا۔

(۹) برٹش انڈیا میں اخراجات افواج سرکار انگریزی پونڈوں میں چند گزشتہ سالوں میں حسب ذیل ہوئے:-

۱۹۱۳	۱۹۱۴	۱۹۱۵	۱۹۱۶	۱۹۱۷	۱۹۱۸ (موازنہ)	۱۹۱۹ (موازنہ)
۱۹۵،۸	۱۹۷،۹	۲۰۳،۴	۲۱۸،۹	۲۴۲،۶	۲۷۶،۷	۲۷۷،۹

ان کو ترسیمی طریق پر ظاہر کرو۔

(۱۰) برٹش انڈیا کی آمدنی کے محاصل پونڈوں میں سنہ ۱۹۱۳ء سے سنہ ۱۹۱۸ء تک مختلف مدّوں سے حسب ذیل ہیں:-

سال	۱۹۱۳	۱۹۱۴	۱۹۱۵	۱۹۱۶	۱۹۱۷	۱۹۱۸
زمین	۲۱۳،۹۲	۲۱۲،۲۲	۲۲۰،۳۱	۲۲۰،۴۱	۲۱۶،۱۱	۲۲۷،۹۹
آبکاری	۸۸،۹۴	۸۸،۵۷	۸۶،۳۲	۹۲،۱۶	۱۰۰،۷۷	۱۰۶،۴۷
کروڑگیری	۷۵،۵۸	۶۳،۴۷	۵۸،۷۴	۸۶،۵۹	۱۱۲،۰۴	۱۰۸،۱۴
آب پاشی	۴۷،۱۳	۴۶،۸۱	۴۷،۷۹	۵۱،۵۶	۵۱،۷۵	۵۳،۲۰

ان کو ترسیمی طریق پر ظاہر کرو۔

(۱۱) ۱۸۷۶ء اور ۱۸۸۵ء کے درمیان جو لوگ آئرلینڈ کے ملک سے غیر ممالک میں چلے گئے اُن کی تعداد ہزاروں میں حسب ذیل ہے۔

سال	۱۸۷۶	۱۸۷۷	۱۸۷۸	۱۸۷۹	۱۸۸۰	۱۸۸۱	۱۸۸۲	۱۸۸۳	۱۸۸۴	۱۸۸۵
تعداد	۳۷٫۵	۳۸٫۵	۴۱٫۱	۴۷٫۰	۹۵٫۵	۷۸٫۴	۸۹٫۱	۱۰۸٫۷	۷۵٫۸	۶۲٫۰

اِن کو ترسیمی طریق پر تعبیر کرو۔

(۱۲) ہر چہار مردم شماری ممالک محروسہ سرکار عالی میں مردوں اور عورتوں کی تعداد الگ الگ لاکھوں میں ۱۸۸۱ سے ۱۹۱۱ تک ذیل کے تختہ میں دیگئی ہے

سال	۱۸۸۱	۱۸۹۱	۱۹۰۱	۱۹۱۱
مرد	۵۰٫۰	۵۸٫۷	۵۶٫۷	۶۸٫۰
عورتیں	۴۸٫۴	۵۶٫۶	۵۴٫۷	۶۵٫۸

اِن اعداد کو مرتسم کرکے ترسیمیں کھینچو اور ذیل کے سوالات کے جواب لکھو

(۱) ۱۸۹۵ میں مردوں کی تعداد کیا تھی؟

(۲) ۱۹۰۷ میں عورتوں کی تعداد کیا تھی؟

(۳) کونسا منحنی مقابلتہً زیادہ اضافہ ظاہر کرتا ہے؟

(۴) اگر اضافہ کی شرح یکساں فرض کیجائے تو مردوں کی تعداد ۹۰ لاکھ کب ہو جائے گی اور اُس سال عورتوں کی تعداد کیا ہوگی۔

(۱۳) بستان آصفیہ میں تختہ ہر چہار مردم شماری متعلقہ عیسائیاں ممالک محروسہ سرکار عالی حسب ذیل ہے

سال	۱۸۸۱	۱۸۹۱	۱۹۰۱	۱۹۱۱
یوروپین	۴۰۱۶	۵۲۶۱	۴۳۴۷	۵۳۸۴
یوریشین	۱۹۵۶	۲۵۰۷	۳۲۹۲	۳۰۰۴
دیسی عیسائی	۷۹۴۲	۱۲۶۶	۱۵۳۵۷	۴۵۹۰۸

ان اعداد کی ترسیمیں بناؤ اور ہر سہ منحنیات کی شرح اضافہ پر بالتفصیل بحث کرو۔

(۱۴) انگلستان اور ویلز، سکاٹلینڈ، آئرلینڈ کی آبادیاں لاکھوں میں ۱۸۳۱ سے ۱۹۱۱ تک جدول ذیل میں درج ہیں۔

سال	۱۸۵۱	۱۸۶۱	۱۸۷۱	۱۸۸۱	۱۸۹۱	۱۹۰۱	۱۹۱۱
انگلستان اور ویلز	۱۷۹٫۲۸	۲۰۰٫۶۶	۲۲۷٫۱۲	۲۵۹٫۷۴	۲۸۰٫۰۲	۳۲۵٫۲۷	۳۶۰٫۷۰
سکاٹلینڈ	۲۸٫۸۹	۳۰٫۶۲	۳۳٫۶۰	۳۷٫۳۶	۴۰٫۲۶	۴۴٫۷۲	۴۷٫۶۱
آئرلینڈ	۶۵٫۵۲	۵۷٫۷۹	۵۴٫۱۲	۵۱٫۷۵	۴۷٫۰۵	۴۴٫۵۹	۴۳٫۹۰

ان نتائج کو ترسیمی طریق پر تعبیر کرو اور معلوم کرو کہ

(۱) ان ممالک کی آبادیاں ۱۸۵۷، ۱۸۸۹، اور ۱۹۰۷ میں کیا تھیں۔

(۲) سکاٹلینڈ اور آئرلینڈ کی آبادیاں کب مساوی ہونگی۔

(۳) اگر آبادی کی کمی یا بیشی کی شرح مستقل ہو تو معلوم کرو کہ انگلستان کی آبادی ۴۰۰ لاکھ کب ہو جائے گی نیز سکاٹلینڈ کی آبادی آئرلینڈ کی آبادی سے ڈیوڑھی اور دوچند کب ہوگی۔

(۱۵) ایک دوکاندار کسی چیز کے مختلف ناپوں کے لئے قیمت کی ایک فہرست بنانا چاہتا ہے، اُس نے اس چیز کے ۶ ناپ تیار کرانے سے ان کی لاگتیں حسب ذیل معلوم کیں

لمبائی انچوں میں	۱۵	۱۹	۲۳	۲۷	۳۱	۳۵	۴۰
قیمت	۱۸	۲۴	۲۸ - ۸	۳۱ - ۱۲	۳۴ - ۳	۳۶ - ۴	۳۸

اس کی ترسیم بناؤ اور اس سے معلوم کرو کہ ۱۲، ۲۱، ۳۰، ۴۵ انچ لمبی اشیاء کی تقریبی قیمتیں کیا ہونگی، اور ۳۲ روپے کو جو چیز آئیگی اس کی لمبائی کیا ہوگی۔

(۱۶) ایک فہرست میں ایلومینیم کی دیگچیوں کے ناپ اور ان کی قیمتیں حسب ذیل مندرج ہیں:-

ناپ	۲ پائنٹ	۳ پائنٹ	۴ پائنٹ	۶ پائنٹ	۸ پائنٹ
قیمت	۴ روپیہ ۱۵ر	۶ روپیہ ۱۵ر	۸ روپیہ ۴ر	۱۰ روپیہ ۱۵ر	۱۴ روپیہ ۱۲ر

ترسیم بنا کر دیکھو کہ ۵، ۷، اور ۹ پائنٹ کی دیگچیوں کی قیمتیں کیا ہونگی اور ۵ روپے، ۷ روپے ۱۲ر، اور ۱۲ روپے کو کتنے پائنٹ کی دیگچیاں آئینگی۔

(۱۷) قیمتوں کی ایک فہرست میں دستی بیگوں کے ناپ اور اُن کی قیمتیں حسب ذیل مندرج ہیں۔

ناپ	۱۲	۱۸	۲۰	۲۴	۲۷	۳۰
قیمت	۲۹ روپیہ ۸ر	۴۵ روپیہ ۸ر	۴۹ روپیہ ۸ر	۵۵ روپیہ ۸ر	۵۹ روپیہ ۱۲ر	۶۳ روپیہ

ترسیم بنانے سے معلوم کرو کہ ۱۵، ۱۷، ۲۲، ۲۶، انچ کے بیگ کی قیمت کیا ہوگی اور ۴۰ روپے ۱۲ آنہ اور ۵۰ روپے میں کتنی لمبائی کے بیگ آئیں گے۔

(۱۸) اسپی قوت ق والے ایک انجن میں ایندھن کا ہفتہ وار صرفہ ص ذیل کی فہرست میں مندرج ہے۔

ق	۱۰	۲۰	۳۰	۵۰	۶۰	۸۰
ص	۳ روپیہ ۲ ر	۷ روپیہ ۱۲ ر	۱۳	۲۵	۳۲	۴۸

بتاؤکہ ۴۵ ، ۶۵ ، ۷۰ ، ۹۰ اسپی قوت والے انجنوں کا صرفہ تقریباً کیا ہوگا۔

(۱۹) ۱۰۰ پونڈ کی یکمشت رقم کے لئے جان کا بیمہ کرانے کے واسطے مختلف عمروں میں حسب ذیل چندہ دینا پڑتا ہے۔

عمر	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
پونڈ	۲٫۱	۲٫۳۵	۲٫۸	۳٫۴	۴٫۲۵	۵٫۶	۶٫۷

ان کو ترسیمی طریق پر تعبیر کرو اور ۲۷ ، ۴۸ ، ۵۲ سال کی عمروں کے لئے چندہ کی مقدار معلوم کرو۔

(۲۰) ع برس کی عمر کے ایک مرد کی جتنے سال اور زندہ رہنے کی امید کی جا سکتی ہے وہ ولٹ کرالماک میں حسب ذیل دی گئی ہے۔

ع، عمر	۰	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸	۳۲	۳۶
ت، امید حیات	۴۱٫۳۵	۵۱٫۰۱	۴۹٫۱۰	۹۵٫۹۶	۴۲٫۵۸	۳۹٫۴۰	۳۶٫۴۱	۳۳٫۵۲	۳۰٫۰۷	۲۷٫۹۶

بتاؤکہ ۷ ، ۱۴ ، ۲۱ ، ۳۵ سال کے مردوں کے لئے امید حیات کتنے سال ہوسکتی ہے۔

(۲۱) لا ، ما کی متناظر قیمتیں ذیل کی جدول میں درج ہیں ، ان کے

باہمی تعلق کو ظاہر کرنے والا منحنی بناؤ۔

لا	۰	۱	۱٫۵	۲	۲٫۵	۳	۳٫۵	۴	۴٫۵	۰
ما	۰	۱	۲٫۲۵	۴	۶٫۲۵	۹	۱۲٫۲۵	۱۶	۲۰٫۵۵	۰

ترسیم کو دیکھنے سے بتاؤ کہ لا کی قیمت ۲٫۴ کے متناظر ما کی کیا قیمت ہوگی۔

(۲۲) ایک تجربہ کی بنا پر دو مقادیر لا، ما کی جو قیمتیں معلوم کیگئی ہیں وہ جدول ذیل میں مندرج ہیں۔

لا	۱	۲	۲٫۵	۳	۳٫۵	۴	۵	۶
ما	۱	٫۵	٫۴	٫۳۳	٫۲۹	٫۲۵	٫۲	٫۱۷

ترسیم کو دیکھنے سے بتاؤ کہ لا کی قیمت ٫۱۸ کے جواب میں ما کی کیا قیمت ہوگی اور ما کی قیمت ٫۱۶ کے جواب میں لا کی کیا قیمت ہوگی۔

(۲۳) ایک جسم جاذبۂ ارض کے زیر عمل کسی خاص مقام سے گرنا شروع کرتا ہے، اس کا فاصلہ طے کردہ ف اور متناظر وقت ت کی قیمتیں جدول ذیل میں مندرج ہیں۔

ت ۔ سکنڈ	٫۵	۱	۱٫۵	۲	۲٫۵	۳	۳٫۵	۴	۴٫۵
ف ۔ فٹ	۴	۱۶	۳۶	۶۴	۱۰۰	۱۴۴	۱۹۶	۲۵۶	۳۲۴

ف اور ت کا تعلق ترسیمی طریق پر ظاہر کرو اور (۱) ایک ایسے

پہاڑ کی بلندی معلوم کرو کہ جس کی چوٹی سے اگر ایک پتھر پھینکا جائے تو وہ ۴٫۲ سکنڈ میں سطح زمین پر آکر گرے، ایک ایسے گڑھے کی گہرائی معلوم کرو جس کی تہ تک پہنچنے کے لئے ایک پتھر کو ۲٫۳۵ سکنڈ لگیں۔

(۲۴) ذیل کی جدول کی بنا پر بار پیما کے ارتفاع کے تغیرات کو ظاہر کرنے کے لئے مسلسل اور صاف منحنی کھینچو۔

وقت	۲ بجے صبح	۶ بجے صبح	۸ بجے صبح	۱۲ بجے دوپہر	۳ بجے شام	۶ بجے شام	۹ بجے شام	۱۲ بجے رات
ارتفاع	۲۹٫۷۵	۲۹٫۶۸	۳۰	۲۹٫۹۵	۲۹٫۹۰	۲۹٫۹۳	۲۹٫۹۷	۲۹٫۹۳

ترسیم کو دیکھ کر بتاؤ کہ ۹ بجے صبح، ایک بجے دوپہر، اور پانچ بجے شام کو بار پیما کا ارتفاع تقریباً کیا ہوگا۔

(۲۵) ایک اسطوانہ کے اندر پانی ڈالا گیا ہے، اس کی تپش کو بالتدریج بدلکر ہر درجہ تپش کے متناظر پانی کا حجم دریافت کیا گیا ہے۔ حجم اور تپش کی یہ متناظر قیمتیں ذیل کی جدول سے ظاہر ہیں۔ ان کو مرتسم کرکے بتاؤ کہ پانی کا حجم تقریباً ۴° سنتی گرید پر کم سے کم ہے۔

تپش سنتی گرید درجوں میں	۱	۲	۳	۵	۸٫۵	۱۰	۱۲	۱۳
حجم مکعب انچوں میں	۱۰	۷	۵٫۷	۵٫۲	۹	۱۲	۱۶	۱۸

ترسیم کو دیکھ کر بتاؤ کہ ۴° سنتی گرید پر حجم کیا ہوگا اور جب حجم ۲۰ مکعب انچ ہوگا تو تپش کیا ہوگی؟

(۲۶) ایک گلاس کو ۱۵° سنتی گرید تپش والے پانی سے بھر کر

بتدریج گرم کیا گیا ہے اور ت سکنڈوں کے بعد اس کی تپش ش کی قیمتیں جدولِ ذیل میں دی گئی ہیں۔

ت	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵
ش	°۱۵	۲۰٫۵	۲۴٫۷	۲۸٫۲	۳۲	۳۵٫۱۵	۳۸٫۲۵	۴۱٫۱

وقت اور تپش کا منحنی کھینچو۔

(۲۷) ایک تجربہ سے کسی گیس پر کے دباؤ اور اس کے متناظر حجم کی قیمتیں جبکہ تپش مستقل رہے ذیل کی جدول دی گئی ہیں۔

دباؤ پونڈوں میں	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حجم مکعب فٹوں میں	۴	۲	۱٫۳۳	۱	٫۸	٫۶۶

اسکو ترسیمی طریق پر ظاہر کرو اور ترسیم کو دیکھ کر بتاؤ کہ جب دباؤ بالترتیب ۲½ پونڈ، ۴½ پونڈ ہوگا تو حجم کیا ہوگا اور کس دباؤ پر حجم ۱٫۵ ہوگا۔

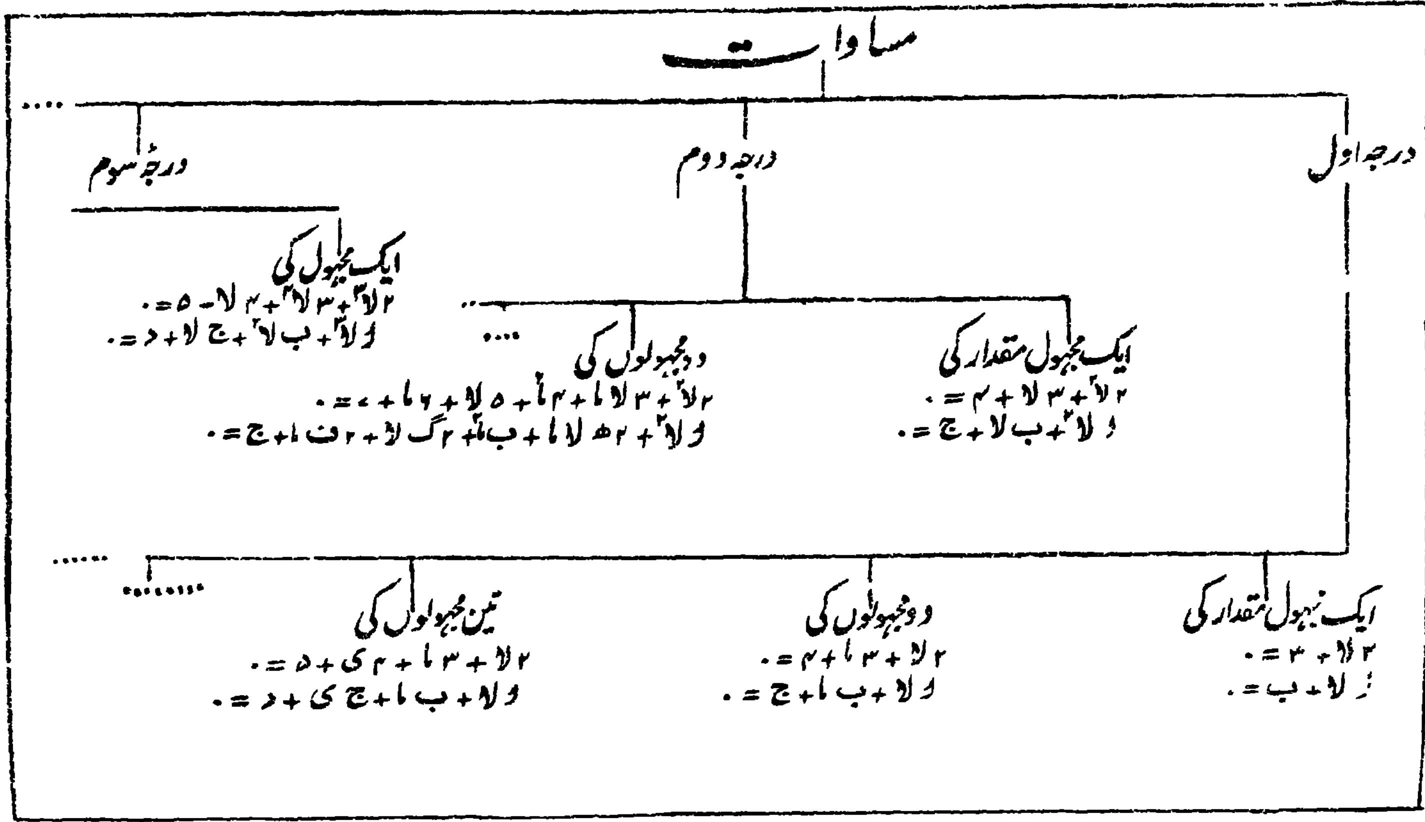


مساوات درجه دوم

باب چہارم

مساوات درجہ دوم

۱۲۱- دفعہ ۱۱ میں ہم نے دیکھا کہ مجہول مقدار کی بڑی سے بڑی قوت مساوات کے درجہ کا تعین کرتی ہے، نیز کسی ایک مساوات میں مجہول مقداروں کی تعداد ایک، دو، تین یا زیادہ ہوسکتی ہے مثلاً ۲ لا + ۳ = ۰ ایک مجہول (مقدار) کی مساوات درجہ اول ہے، ۲ لا + ۳ ما + ۴ = ۰ دو مجہولوں کی مساوات درجہ اول ہے، اسی طرح سے ۲ لا۲ + ۳ لا + ۴ = ۰ ایک مجہول کی مساوات درجہ دوم ہے وغیرہ وغیرہ دیکھو نقشہ ذیل، اس میں ہر عددی مساوات کے ساتھ اس کی عام سے عام صورت بھی لکھ دی گئی ہے۔



مساوات
درجہ اول
درجہ دوم
درجۂ سوم
ایک مجہول مقدار کی
دو مجہولوں کی
تین مجہولوں کی
ایک مجہول مقدار کی
دو مجہولوں کی
ایک مجہول کی

نیز ہم جانتے ہیں کہ کسی مساوات کے حل یا اصل سے کیا مراد ہے، معلوم مقداروں کی رقوم میں مجہول مقدار کی وہ قیمت جو مساوات کو پورا کرے مساوات کا حل یا اصل کہلاتی ہے، تفصیل کے لئے دیکھو دفعہ ۲؛

۳۲- مساوات درجہ دوم

جس مساوات میں مجہول مقدار کی بڑی سے بڑی قوت دو ہو اُسے مساوات درجہ دوم کہتے ہیں مثلاً

$$۲\,\text{لا}^{۲} + ۳ = ۰$$

$$۳\,\text{لا}^{۲} + ۵\,\text{لا} = ۰$$

$$\text{لا}^{۲} + ۵\,\text{لا} - ۱۲ = ۰$$

$$۶\,\text{لا}^{۲} - ۱۱\,\text{لا} = ۱۲$$

$$(\text{لا} - ۳)^{۲} = ۵\,(\text{لا} + ۱)$$

$$۳\,(۲\,\text{لا} + ۷)\,(\text{لا} - ۶) = ۲۳$$

وغیرہ وغیرہ

اوپر کی ہر ایک مساوات میں صرف ایک مجہول مقدار شامل ہوتی ہے اور اُس کی بڑی سے بڑی قوت دو ہے، در اصل اس کا پورا نام **ایک مجہول کی مساوات درجہ دوم** ہونا چاہئے لیکن اختصاراً اسے مساوات درجہ دوم کہتے ہیں۔

طالب علم جانتا ہے کہ $\text{ا}\,\text{لا}^{۲} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج} = ۰$ میں معلوم مقادیر ا، ب، ج کو مختلف عددی قیمتیں دینے سے اوپر کی ہر ایک مساوات اور نیز درجہ دوم کی کوئی عددی مساوات حاصل ہو سکتی ہے پس مساوات درجہ دوم کی عام سے عام صورت

ا لا^۲ + ب لا + ج = ۰

۴۳- ذیل کا مسئلہ ضروری ہے۔

اگر کوئی حاصلضرب صفر ہو تو اس حاصل ضرب کا ایک جزو ضربی لازماً صفر ہوگا۔

فرض کرو کہ حاصلضرب لا ما = ۰، تب اگر ما صفر کے مساوی نہ ہو تو تقسیم کی تعریف کے مطابق

لا = ۰/ما = ۰ یعنی ایک جزو ضربی لا = ۰

اسیطرح فرض کرو کہ حاصل ضرب لا ما ی = ۰ تو اگر لا اور ما میں سے کوئی بھی صفر کے مساوی نہ ہو تو ی = ۰/لا ما = ۰ پس ایک جزو ضربی ی صفر کے مساوی ہے۔

اسی طرح یہ مسئلہ اجزائے ضربی کی کسی تعداد کے لئے ثابت کیا جا سکتا ہے۔

امثلہ- اگر لا (لا + ۳) = ۰ تو ظاہر ہے کہ یا تو لا = ۰ یا لا + ۳ = ۰ پس جملہ لا (لا + ۳) کے صفر کے مساوی ہونے کے لئے ضروری ہے کہ لا = ۰ یا -۳

اسی طرح ہم مساوات لا^۲ = ۴ کو حل کر سکتے ہیں

طرفین سے ۴ منفی کرنے سے

لا^۲ - ۴ = ۰ یعنی (لا + ۲) (لا - ۲) = ۰

پس یا تو لا + ۲ = ۰ جس سے لا = -۲

یا لا - ۲ = ۰ 〃 لا = ۲

۴۴ - مساوات درجہ دوم کا حل اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے سے

مساوات درجہ دوم میں مجہول مقدار کی قوت دو سے زیادہ نہیں ہونی چاہئے لیکن دو سے کم سب قوتیں اس مساوات میں واقع ہو سکتی ہیں مثلاً مساوات $لا^۲ + ۲ لا - ۱۵ = ۰$ میں لا کی دوسری قوت کے علاوہ لا کی پہلی قوت اور صفر قوت بھی واقع ہوتی ہے، ایسی مساوات درجہ دوم کو مخلوط مساوات کہتے ہیں۔ لیکن جس مساوات میں مجہول مقدار کا صرف مربع شامل ہو اور پہلی قوت شریک نہ ہو اسے خالص مساوات درجہ دوم کہتے ہیں جیسے $لا^۲ - ۹ = ۰$ اور $۶ لا^۲ = ۹۶$

درجہ دوم کی خالص مساواتیں اجزائے ضربی میں تحلیل ہونے سے بآسانی حل ہو سکتی ہیں۔

مساوات $۷ لا^۲ = ۶۳$ کو حل کرو۔

طرفین مساوات کو ۷ پر تقسیم کرنے سے $لا^۲ = ۹$

طرفین سے ۹ تفریق کرنے سے $لا^۲ - ۹ = ۰$

یعنی $(لا - ۳)(لا + ۳) = ۰$

اس حاصل ضرب کے صفر ہونے کے لئے ضروری ہے کہ اس کا کوئی ایک جزو ضربی صفر ہو پس $لا - ۳ = ۰$ جس سے $لا = ۳$

یا $لا + ۳ = ۰$ جس سے $لا = -۳$

پس مساوات $۷ لا^۲ = ۶۳$ کے دو حل $+۳$ اور -۳ ہیں

تصدیق - جب $لا = +۳$ تو $۷ لا^۲ = ۷ (+۳)^۲ = ۶۳$

پس لا کی قیمت ۳ کے لئے طرفین مساوات برابر ہو جاتے ہیں۔

اسلئے ۳ مساوات کا حل ہے۔ اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ -۳ بھی مساوات کا حل ہے۔

مساوات $۳(لا^{۲}+۱) - ۵ = ۲(لا^{۲}+۷)$ کو حل کرو۔

$$۳لا^{۲} - ۲ = ۲لا^{۲} + ۱۴$$

یعنی $لا^{۲} = ۱۶$

طرفین سے ۱۶ تفریق کرنے سے

$لا^{۲} - ۱۶ = ۰$ یعنی $(لا - ۴)(لا + ۴) = ۰$

جس سے $لا = ۴$ یا -۴

طالب علم اس کی تصدیق کرے کہ ۴ اور -۴ مساوات کے حل ہیں۔ مساوات کی شکل $لا^{۲} = ۱۶$ سے ظاہر ہے کہ لا ایک ایسی مقدار ہے جس کا مربع ۱۶ ہے۔ اسلئے لا کو +۴ یا -۴ کے مساوی ہونا چاہیئے۔

۳۵۔ درجہ دوم کی مخلوط مساواتوں کو جب معیاری صورت میں لایا جائے تو مساوات کے دائیں جانب ایک جملہ درجہ دوم ہوگا اور بائیں طرف صفر، جب یہ دائیں طرف کا رکن دو اجزائے ضربی درجہ اول میں تحلیل ہو سکے تو مساوات باسانی حل ہو سکتی ہے۔

درجہ دوم کی مساواتوں کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں اور ان میں سے چند ذیل کی مثالوں میں دیئے جائینگے مگر کوئی اور طریقہ استعمال کرنے سے پہلے طالب علم کو چاہیئے کہ مساوات کو معیاری صورت میں لانے کے بعد دائیں طرف کے جملہ درجہ دوم کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کی کوشش کرے، اگر وہ اس میں کامیاب ہوگیا تو وہ مساوات کو حل کر سکے گا۔

(۱) مساوات $لا^۲ - ۸لا + ۱۵ = ۰$ پر غور کرو

یہ اس طرح لکھی جاسکتی ہے $(لا - ۳)(لا - ۵) = ۰$

ہم دیکھتے ہیں کہ اگر $لا = ۳$ تو وائیں جانب $= (۳ - ۳)(۳ - ۴)$

$= ۰ \times - ۱ = ۰$

پس لا کی قیمت ۳ مساوات کو پورا کرتی ہے یعنی ۳ مساوات کی اصل ہے۔

نیز جب $لا = ۵$ تو مساوات کی وائیں جانب $= (۵ - ۳)(۵ - ۵)$

$= ۲ \times ۰ = ۰$

اس لئے ۵ بھی مساوات کی اصل ہے۔

ہم دیکھیں گے کہ ہر مساوات درجہ دوم کی دو اور صرف دو اصلیں ہوتی ہیں۔

نوٹ ۔ ہم پہلے ثابت کرچکے ہیں کہ صفر کا ہر محدود ضعف صفر ہوتا ہے ۔

$۷ \times ۰ = ۰$ ، $۱۰۰۰ \times ۰ = ۰$ ، $ا \times ۰ = ۰$ ، $(ا + ب) \times ۰ = ۰$

(۲) مساوات $۳لا^۲ = ۶۰ - ۳لا$ کو حل کرو۔

تمام رقموں کو وائیں جانب لانے اور طرفین کو ۳ پر تقسیم کرنے سے

$لا^۲ + لا - ۲۰ = ۰$

اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے سے

$(لا + ۵)(لا - ۴) = ۰$

جس سے ظاہر ہے کہ -۵ اور $+۴$ مساوات کی اصلیں ہیں

تصدیق ۔ اگر $لا = -۵$

تو وائیں جانب $= ۳ \times (۵)^۲ = ۷۵$

اور بائیں جانب $= ۶۰ - ۳ \times -۵ = ۷۵$

اس لئے -۵ مساوات کی ایک اصل ہے۔

اسی طرح اگر $\text{لا} = +۴$ تو مساوات کا دایاں رکن $= ۳ \times (۴)^۲ = ۴۸$

اور　بایاں رکن $= ۶۰ - ۳ \times ۴ = ۴۸$

اس لئے ۴ مساوات کی ایک اصل ہے

(۳) مساوات $۶\,\text{لا}^۲ - \text{لا} - ۱۵ = ۰$ پر غور کرو

اسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں $(۲\,\text{لا} + ۳)(۳\,\text{لا} - ۵) = ۰$

اس حاصل ضرب کے صفر ہونے کے لئے ضروری ہے کہ ایک جزو ضربی صفر ہو۔ پس اگر $۲\,\text{لا} + ۳ = ۰$　تو $\text{لا} = -\frac{۳}{۲}$

اور مساوات میں اس کو مندرج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات پوری ہوتی ہے کیونکہ $۶(-\frac{۳}{۲})^۲ - (-\frac{۳}{۲}) - ۱۵ = ۶ \times \frac{۹}{۴} + \frac{۳}{۲} - ۱۵$

$= \frac{۲۷}{۲} + \frac{۳}{۲} - ۱۵$

$= ۱۵ - ۱۵ = ۰$

اگر $۳\,\text{لا} - ۵ = ۰$ تو $\text{لا} = \frac{۵}{۳}$ جس سے مساوات پوری ہوتی ہے

پس مساوات مفروضہ کی دو اصلیں $-\frac{۳}{۲}$ اور $\frac{۵}{۳}$ ہیں

(۴) $۹\,\text{لا}^۲ + ۱۶ = ۲۴\,\text{لا}$

مساوات مفروضہ سے $۹\,\text{لا}^۲ - ۲۴\,\text{لا} + ۱۶ = ۰$

یعنی　$(۳\,\text{لا} - ۴)^۲ = ۰$

اس مساوات کے وائیں جانب جزو ضربی $۳\,\text{لا} - ۴$ دو دفعہ واقع ہوتا ہے اور اس مساوات درجہ دوم سے ہمیں لا کی صرف ایک قیمت معلوم ہوتی ہے $\frac{۴}{۳}$ جو مساوات کو پورا کرتی ہے۔

ایسی صورت میں ہم یہ کہتے ہیں کہ مساوات کی دو اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

۳۶۔ مساوات کو حل کرنے سے پیشتر یہ ضروری ہے کہ اسے معیاری صورت میں لایا جائے اور اگر اس میں خطوط وحدانی یا کسریں واقع ہوں تو مساوات کو ان سے صاف کرلیا جائے۔

(۱) ۴ - ۳ لا^2 = - ۱۳/۵ لا کو حل کرو۔

طرفین کو ۵ سے ضرب دینے اور تمام رقموں کو دائیں جانب لانے سے

۲۰ - ۱۵ لا^2 + ۱۳ لا = ۰

جملہ رقوم کی علامات بدلنے سے [یعنی طرفین کو - ۱ کے ساتھ ضرب دینے سے

۱۵ لا^2 - ۱۳ لا - ۲۰ = ۰

یعنی (۵ لا + ۴) (۳ لا - ۵) = ۰

جس سے لا = - ۴/۵ یا ۵/۳ جو مساوات کی اصلیں ہیں

طالب علم اس کی تصدیق کرے۔

(۲) مساوات ۱/(لا+۱) + ۲/(لا+۲) - ۶/(لا+۳) = ۰ کو حل کرو۔

نسب نماؤں کے ذو اضعاف اقل (لا+۱) (لا+۲) (لا+۳) سے ضرب دینے سے

(لا+۲) (لا+۳) + ۲ (لا+۱) (لا+۳) - ۶ (لا+۱) (لا+۲) = ۰

یعنی لا^2 + ۵ لا + ۶ + ۲ (لا^2 + ۴ لا + ۳) - ۶ (لا^2 + ۳ لا + ۲) = ۰

یعنی ۳ لا^2 + ۵ لا = ۰

اس لئے لا = ۰ یا - ۵/۳

امثلہ نمبری ۸

ذیل کی مساواتوں کی اصلیں لکھو

۱۔ (لا - ۱) (لا - ۲) = ۰ ۔۔۔ ۲۔ (لا + ۲) (لا - ۱) = ۰

۳۔ لا (لا + ۳) = ۰ ۔۔۔ ۴۔ (لا + ۲) (لا + ۵) = ۰

۵۔ (لا + ا) (لا - ب) = ۰ ۔۔۔ ۶۔ (لا - ۲ و) (لا + ۲ ج) = ۰

۷۔ (لا - ۱/۲) (لا + ۳/۴) = ۰ ۔۔۔ ۸۔ (لا - ا + ب) (لا + ب - ج) = ۰

۹۔ (لا - ۳)^{۲} = ۰ ۔۔۔ ۱۰۔ {لا + ۲ (ا + ب)} {لا - ۳ (ا - ب)} = ۰

۱۱۔ ۷ لا^{۲} = ۴ لا ۔۔۔ ۱۲۔ لا (لا + ۲) - ۵ (لا + ۲) = ۰

بتاؤ کہ لا کی کن قیمتوں کے لئے ذیل کے جملے صفر کے مساوی ہیں

۱۳۔ ۳ لا^{۲} - لا ۔۔۔ ۱۴۔ لا^{۲} - ۴ لا + ۳

۱۵۔ لا^{۲} + ۱۱ لا + ۲۴ ۔۔۔ ۱۶۔ (۲ لا + ۱)^{۲} - ۹

۱۷۔ ۵ لا^{۲} - لا - ۶ ۔۔۔ ۱۸۔ ۸ ا لا^{۲} - ۳۳ لا ب + ۵ ب^{۲}

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو اور ہر صورت میں اپنے جواب کی تصدیق کرو

۱۹۔ لا^{۲} + ۷ لا + ۱۰ = ۰ ۔۔۔ ۲۰۔ لا^{۲} - ۱۰ لا + ۲۱ = ۰

۲۱۔ لا^{۲} + ۵ لا - ۶ = ۰ ۔۔۔ ۲۲۔ لا^{۲} - ۶ لا - ۲۷ = ۰

۲۳۔ لا^{۲} - لا - ۲ = ۰ ۔۔۔ ۲۴۔ (۳ لا - ۱) (۲ لا + ۱) = ۳ - لا

۲۵۔ ۳۰ + ۱۱ لا + لا^{۲} = ۰ ۔۔۔ ۲۶۔ ۴۰ = ۳ لا + لا^{۲}

ذیل کی مساواتوں کی اصلیں معلوم کرو

۲۷۔ ۳ (۲ لا + ۳) (۳ لا + ۵) = ۰ ۔۔۔ ۲۸۔ لا - ۱ = ۲/لا

۲۹- $\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = 2$

۳۰- $\text{لا} - \frac{1}{\text{لا}} = \frac{8}{3}$

۳۱- $\frac{15\text{لا}}{15 - \text{لا}} = \frac{1}{\text{لا} + 1}$

۳۲- $\frac{1}{\text{لا} - 1} - \frac{1}{\text{لا} + 3} = \frac{1}{35}$

۳۳- $\text{لا} - \frac{\text{لا}^2 - 8}{\text{لا}^2 + 5} = 2$

۳۴- $\frac{2\text{لا} + 1}{3} + \frac{3}{2\text{لا} + 1} = 2$

۳۵- $\frac{\text{لا} + 10}{\text{لا} - 5} - \frac{10}{\text{لا}} = \frac{11}{6}$

۳۶- $2(\text{لا} - 3) + \frac{7}{\text{لا} + 2} = 5$

۳۷- $\frac{\text{لا} - \text{ا}}{2\text{لا} - 3\text{ا}} = \frac{2\text{ا}}{\text{لا}}$

۳۸- $\frac{7}{\text{لا} + 3} + \frac{27}{\text{لا}^2 - 9} = \frac{6\text{لا}}{4\text{لا} - 12}$

۳۷- مساوات $\text{لا}^2 + 2\text{ا}\,\text{لا} = 0$ پر غور کرو

اس میں لا^2 کا سر ایک ہے اور لا کا سر ۲ا ہے، اگر طرفین پر ا^2 یعنی لا کے نصف سر کا مربع زیادہ کر دیا جائے تو

$$\text{لا}^2 + 2\text{ا}\,\text{لا} + \text{ا}^2 = \text{ا}^2$$

یعنی

$$(\text{لا} + \text{ا})^2 = \text{ا}^2$$

ہم دیکھتے ہیں کہ طرفین مساوات پر ا^2 زیادہ کرنے سے دائیں جانب کا رکن مربع کامل بن جاتا ہے۔

مساوات $\text{لا}^2 - 8\text{لا} = 0$ کو لو، طرفین پر لا کے نصف سر کا مربع $(-4)^2$ زیادہ کرنے سے

$$\text{لا}^2 - 8\text{لا} + (-4)^2 = 16$$

$$(\text{لا} - 4)^2 = 16$$

دائیں طرف کا رکن مربع کامل بن جاتا ہے۔

طالب علم دیکھے کہ اس مساوات میں بھی لا^2 کا سر ایک تھا۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ

جملہ $لا^۲ + ۶ لا$ ہو جاتا ہے $(لا + ۳)^۲$ طرفین پر $۳^۲$ یعنی ۹ زیادہ کرنے سے (۱)

اور " $لا^۲ - ۱۰ لا$ " " $(لا - ۵)^۲$ " $۵^۲$ یعنی ۲۵ " " (۲)

$لا^۲ - ۲ ج لا$ " $(لا - ج)^۲$ " $ج^۲$ " ..... (۳)

پس بالعموم $لا^۲ \pm ۲ ن لا$ کی شکل کا کوئی جملہ جس میں $لا^۲$ کا سر ایک ہو مربع کامل بن جاتا ہے اگر لا کے نصف سر کے مربع کو طرفین پر زیادہ کر دیا جائے۔

اب ہم اس امر کو درجہ دوم کی مساواتوں کے حل کرنے میں استعمال کرتے ہیں۔

مثال ۱ ـ مساوات $لا^۲ = ۳۲ - ۱۴ لا$ کو حل کرو

یہ مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے $لا^۲ + ۱۴ لا = ۳۲$

اس میں $لا^۲$ کا سر ایک ہے، پس لا کے نصف سر کے مربع کو طرفین پر زیادہ کرنے سے

$$لا^۲ + ۱۴ لا + \left(\frac{۱۴}{۲}\right)^۲ = ۳۲ + \left(\frac{۱۴}{۲}\right)^۲$$

یعنی $لا^۲ + ۱۴ لا + ۷^۲ = ۳۲ + ۴۹ = ۸۱$

یعنی $(لا + ۷)^۲ = ۹^۲$

طرفین کا جذر لینے سے $لا + ۷ = \pm ۹$ .... (۱)

اگر مثبت علامت لی جائے تو $لا + ۷ = ۹$ یعنی $لا = ۲$

اگر منفی علامت لی جائے تو لا + ۷ = -۹ یعنی لا = -۱۶

نوٹ بادی النظر میں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ مساوات (۱) ہونی چاہیئے

± (لا + ۷) = ± ۹

کیونکہ ± (لا + ۷) جذر ہے (لا + ۷)^{2} کا اور ± ۹ جذر ہے ۸۱ کا

لیکن یہ غیر ضروری ہے جیسا کہ ہم چاروں صورتوں کو الگ الگ لیکر دیکھ سکتے ہیں

دونوں طرف مثبت علامت لینے سے لا + ۷ = ۹ یعنی لا = ۲ }
" منفی " -لا - ۷ = -۹ یعنی لا = ۲ } ایک ہی جواب

دائیں طرف مثبت اور بائیں طرف منفی علامت لینے سے

لا + ۷ = -۹ یعنی لا = -۱۶

دائیں طرف منفی اور بائیں طرف مثبت علامت لینے سے

-لا - ۷ = +۹ یعنی لا = -۱۶

دونوں صورتوں میں جواب ایک ہی ہے۔

پس معلوم ہوا کہ دوہری علامت (±) صرف ایک طرف لگانا کافی ہے اور بالعموم اسے عددی جذر کے ساتھ لگاتے ہیں۔

مثال ۲ — لا^{2} + (۰ء۹) لا = ۱ء۱۲

لا کے نصف سر کے مربع (۰ء۴۵)^{2} کو طرفین پر زیادہ کرنے سے

لا^{2} + (۰ء۹) لا + (۰ء۴۵)^{2} = ۱ء۱۲ + (۰ء۴۵)^{2}

= ۱ء۱۲ + ۰ء۲۰۲۵

(لا + ۰ء۴۵)^{2} = ۱ء۳۲۲۵

حسابی طریق سے ۱ء۳۲۲۵ کا جذر ۱ء۱۵ معلوم ہوتا ہے

پس لا + ۰ء۴۵ = ± ۱ء۱۵

اس لئے $\text{لا} = ۰،۷$ یا $-۱،۶$

یاد رہے کہ تکمیل مربع کے عمل سے پہلے لا۲ کے سر کو ایک بنا لینا چاہئیے۔

مثال ۳۔ $۲\,\text{لا}^۲ + ۷\,\text{لا} - ۴ = ۰$

مساوات کو اس طرح ترتیب دو کہ ایسی تمام رقمیں جن میں لا شامل ہوتا ہے سب کی سب دائیں جانب آ جائیں۔

$$۲\,\text{لا}^۲ + ۷\,\text{لا} = ۴$$

طرفین کو ۲ پر تقسیم کرنے سے لا۲ کے سر کو ایک بناؤ

پس $\text{لا}^۲ + \frac{۷}{۲}\,\text{لا} = ۲$

تکمیل مربع کے لئے لا کے نصف سر کے مربع $\left(\frac{۷}{۴}\right)^۲$ کو طرفین پر زیادہ کرو تو

$$\text{لا}^۲ + \frac{۷}{۲}\,\text{لا} + \left(\frac{۷}{۴}\right)^۲ = ۲ + \left(\frac{۷}{۴}\right)^۲ = ۲ + \frac{۴۹}{۱۶} = \frac{۸۱}{۱۶}$$

پس $\left(\text{لا} + \frac{۷}{۴}\right)^۲ = \frac{۸۱}{۱۶}$

جذر لینے سے

$$\text{لا} + \frac{۷}{۴} = \pm \frac{۹}{۴}$$

مثبت علامت لینے سے

$$\text{لا} = \frac{۹}{۴} - \frac{۷}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

منفی علامت لینے سے

$$\text{لا} = -\frac{۹}{۴} - \frac{۷}{۴} = -۴$$

پس مساوات مفروضہ $۲\,\text{لا}^۲ + ۷\,\text{لا} - ۴ = ۰$ کی دو اصلیں $\frac{۱}{۲}$ اور -۴ ہیں۔

مثال ۴۔ مساوات $۶\,\text{لا}^۲ = \text{لا} + ۲$ کو حل کرو۔

لا والی رقموں کو ایک طرف لانے سے

$$\text{۶ لا}^{۲} - \text{لا} = \text{۲}$$

طرفین کو لا² کے سر پر تقسیم کرنے سے

$$\text{لا}^{۲} - \frac{\text{۱}}{\text{۶}}\,\text{لا} = \frac{\text{۱}}{\text{۳}}$$

اگر طرفین پر لا کے نصف سر کا مربع $\left(-\frac{\text{۱}}{\text{۱۲}}\right)^{۲}$ زیادہ کر دیا جائے تو

$$\text{لا}^{۲} - \frac{\text{۱}}{\text{۶}}\,\text{لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۱۴۴}} = \frac{\text{۱}}{\text{۳}} + \frac{\text{۱}}{\text{۱۴۴}}$$

$$\left(\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۱۲}}\right)^{۲} = \frac{\text{۴۹}}{\text{۱۴۴}}$$

$$\therefore \quad \text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۱۲}} = \pm \frac{\text{۷}}{\text{۱۲}}$$

اس لئے یا $\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۱۲}} = \frac{\text{۷}}{\text{۱۲}}$ جس سے $\text{لا} = \frac{\text{۷}}{\text{۱۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۱۲}} = \frac{\text{۲}}{\text{۳}}$

یا $\text{لا} - \frac{\text{۱}}{\text{۱۲}} = -\frac{\text{۷}}{\text{۱۲}}$ ؍؍ $\text{لا} = -\frac{\text{۷}}{\text{۱۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۱۲}} = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$

پس مساوات مفروضہ کی دو اصلیں $\frac{\text{۲}}{\text{۳}}$ اور $-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ ہیں۔

۳۸۔ ہم جانتے ہیں کہ ایک مجہول کی مساوات درجہ دوم کی عام سے عام شکل $\text{ا لا}^{۲} + \text{ب لا} + \text{ج} = \text{۰}$ ہے۔

اس مساوات میں ا، ب، ج کو مختلف عددی قیمتیں دینے سے ہم درجہ دوم کی ہر عددی مساوات حاصل کر سکتے ہیں، اس لئے اگر ہم اس مساوات کو حل کر سکیں، یعنی لا کی ایسی قیمت معلوم مقادیر ا، ب، ج کی رقوم میں معلوم کر سکیں جو مساوات میں مندرج کرنے سے طرفین مساوات کو برابر کر دے تو ایسا خیال کرنا چاہیئے کہ ہم نے ہر عددی مساوات درجہ دوم کو حل کر لیا کیونکہ $\text{ا لا}^{۲} + \text{ب لا} + \text{ج} = \text{۰}$ کے حلوں یا اصلوں میں ا، ب، ج کی بجائے مفروضہ مساوات

کے عددی سر رکھنے سے اس کی اصلیں معلوم ہو سکتی ہیں ۔

پس ہم $\text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج} = 0$ کی اصلیں معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں، ہم دیکھیں گے کہ پہلے کی ہر ایک مساوات درجہ دوم کی طرح اس کی بھی دو اور صرف دو اصلیں ہیں ۔

لا والی رقموں کو ایک طرف لانے سے

$$\text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{لا} = -\text{ج}$$

لا^2 کے سر پر تقسیم کرنے سے

$$\text{لا}^2 + \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{لا} = -\frac{\text{ج}}{\text{ا}}$$

لا کے نصف سر کے مربع $\left(\frac{\text{ب}}{2\text{ا}}\right)^2$ کو طرفین پر زیادہ کرنے سے

$$\text{لا}^2 + \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{لا} + \left(\frac{\text{ب}}{2\text{ا}}\right)^2 = -\frac{\text{ج}}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}^2}{4\text{ا}^2}$$

$$= \frac{\text{ب}^2 - 4\text{ا}\text{ج}}{4\text{ا}^2}$$

$$\left(\text{لا} + \frac{\text{ب}}{2\text{ا}}\right)^2 = \pm\frac{\sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{ا}\text{ج}}}{2\text{ا}}$$

$$\therefore\ \text{لا} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{ا}\text{ج}}}{2\text{ا}} \ldots\ldots (1)$$

پس مساوات کی دو اصلیں $\frac{-\text{ب} + \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{ا}\text{ج}}}{2\text{ا}}$ ، $\frac{-\text{ب} - \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{ا}\text{ج}}}{2\text{ا}}$ ہیں ۔

ضابطہ (۱) ہر مساوات درجہ دوم کے حل کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے ۔

مثال ۱: $۵\,\text{لا}^2 = ۸\,\text{لا} + ۲۱$ کو حل کرو۔

مساوات کو معیاری صورت $\text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج} = ۰$ میں لانے سے

$$۵\,\text{لا}^2 - ۸\,\text{لا} - ۲۱ = ۰$$

یہاں $\text{ا} = ۵$، $\text{ب} = -۸$، $\text{ج} = -۲۱$

$$\therefore \quad \text{لا} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - ۴\,\text{اج}}}{۲\,\text{ا}}$$

$$= \frac{+۸ \pm \sqrt{۶۴ + ۴۲۰}}{۱۰} = \frac{+۸ \pm ۲۲}{۱۰}$$

$$= ۳ \quad \text{یا} \quad -۱٫۴$$

ظاہر ہے کہ ضابطہ $\text{لا} = \dfrac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - ۴\,\text{اج}}}{۲\,\text{ا}}$ ....(۱)

کی مدد سے کسی مساوات درجہ دوم کی دونوں اصلیں معلوم ہو سکتی ہیں، مگر یاد رہے کہ نتیجہ (۱) میں مرکب مقدار $\text{ب}^2 - ۴\,\text{اج}$ کا جذر شامل ہوتا ہے ہم مساوات کے حل کو سادہ صورت میں نہیں لا سکتے جب تک کہ ہمیں ا، ب، ج کی عددی قیمتیں نہ دی ہوئی ہوں۔ بعض اوقات ایسا ہوگا کہ یہ قیمتیں مندرج کرنے سے $\text{ب}^2 - ۴\,\text{اج}$ ایک مربع کامل نہیں ہوگا، اس صورت میں مساوات کا ٹھیک ٹھیک عددی حل معلوم نہیں ہو سکیگا لیکن تقریبی حل کسی درجہ صحت تک معلوم کرنا ممکن ہوگا۔

مثال ۲ — $۵\,\text{لا}^2 - ۱۷\,\text{لا} + ۱۰ = ۰$ کو حل کرو۔

یہاں $\text{ا} = ۵$، $\text{ب} = -۱۷$، $\text{ج} = ۱۰$

$$\text{پس} \quad \text{لا} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - ۴\,\text{اج}}}{۲\,\text{ا}}$$

$$= \frac{۱۷ \pm \sqrt{۲۸۹ - ۲۰۰}}{۱۰} = \frac{۱۷ \pm \sqrt{۸۹}}{۱۰}$$

اب $\sqrt{۸۹} = ۹٫۴۳۳۹$ تقریباً

$$\therefore \text{لا} = \frac{۱۷ \pm ۹٫۴۳۳۹}{۱۰} = ۲٫۶۴۳۳۹$$

یا $۰٫۷۵۶۶۱$

یہ نتائج صرف اعشاریہ کے چار مقامات تک درست ہیں اور ان میں سے کوئی بھی مساوات کو بالکل صحیح طور پر پورا نہیں کرے گا۔

اگر مجہول مقدار کی عددی قیمتیں خاص طور پر درکار نہ ہوں تو اصلوں کو اسی صورت میں چھوڑنا کافی ہوگا

$$\text{لا} = \frac{۱۷ \pm ۹٫۴۳۳۹}{۱۰}$$

مثال ۳ — مساوات $۲\text{لا}^۲ - ۳\text{لا} + ۱۱ = ۰$ کو حل کرو

$$\text{لا} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^۲ - ۴\text{اج}}}{۲\text{ا}}$$

$$= \frac{۳ \pm \sqrt{(-۳)^۲ - ۴ \times ۲ \times ۱۱}}{۴}$$

$$= \frac{۳ \pm \sqrt{۹ - ۸۸}}{۴}$$

$$= \frac{۳ \pm \sqrt{-۷۹}}{۴} .$$

اب تک جتنی مقداروں سے ہمیں واسطہ پڑا ہے ان کے متعلق ہمیں معلوم ہے کہ خواہ وہ مثبت ہوں یا منفی اِن کا مربع ہمیشہ مثبت ہوتا ہے پس جہاں تک ہم جانتے ہیں کوئی مقدار یا عدد ایسا نہیں جس کا مربع -۷۹ ہو یعنی ایک ایسی مقدار کا معلوم کرنا ناممکن ہے جو صحیح طور پر یا تقریباً -۷۹ کے جذر کو تعبیر کرے۔ ایسی صورت میں مساوات کی

اصلیں خیالی کہلاتی ہیں۔

مساوات $ا لا^۲ + ب لا + ج = ۰$ کی دو اصلیں ہیں،
$$لا = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^۲ - ۴ ا ج}}{۲ ا}$$
ظاہر ہے کہ جب کبھی کسی مساوات کے مسلہ $ب^۲ - ۴ ا ج$ منفی ہوگا تو مساوات مفروضہ کی اصلیں خیالی ہوں گی۔

۳۹- پس درجہ دوم کی مساواتوں کو حل کرنے کے تین طریقے ہیں۔

(۱) اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے سے

(۲) تکمیل مربع سے

(۳) ضابطہ $\frac{- ب \pm \sqrt{ب^۲ - ۴ ا ج}}{۲ ا}$ کی رو سے

طالب علم کو چاہیے کہ ان تینوں میں اچھی مشق اور دسترس حاصل کرے۔ سب سے پہلے اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کی کوشش کیجائے۔ اگر بادی النظر میں یہ ممکن نہ ہو تو دوسرے یا تیسرے طریقہ سے مدد لی جائے مگر یہ تیسرا طریقہ سراسر دوسرے پر مبنی ہے کیونکہ تکمیل مربع سے ہم نے مساوات $ا لا^۲ + ب لا + ج = ۰$ کی مجہول مقدار لا کی قیمتیں $لا = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^۲ - ۴ ا ج}}{۲ ا}$ معلوم کی ہیں، پس اگر مساوات اجزائے ضربی کی مدد سے حل نہ ہو سکے تو طالب علم تکمیل مربع کے عمل سے اسے حل کرے۔ ضابطہ کا یاد رکھنا بھی کئی لحاظ سے مناسب ہے، اس کی مدد سے صرف یہی نہیں کہ ہم کسی مساوات کی اصلوں کو فقط عددی قیمتیں مندرج کرنے سے معلوم کر سکتے ہیں بلکہ ہم جانتے ہیں کہ مرکب مقدار

ب^2 - ۴ ا ج کی علامت اصلوں کی نوعیت کا فیصلہ کرتی ہے۔
کیونکہ فرض کرو کہ درجہ دوم کی عام سے عام مساوات
ا لا^2 + ب لا + ج = ۰ ہے جس میں ا، ب، ج معلوم مقداریں
ہیں۔ اسکو حل کرنے سے

$$لا = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^2 - ۴ ا ج}}{۲ ا}$$

یعنی اس مساوات کی اصلیں الگ الگ $\frac{- ب + \sqrt{ب^2 - ۴ ا ج}}{۲ ا}$

اور $\frac{- ب - \sqrt{ب^2 - ۴ ا ج}}{۲ ا}$ ہیں۔

پس اگر (۱) ب^2 - ۴ ا ج = مثبت مقدار تو اس کی دونوں اصلیں
حقیقی اور غیر مساوی ہونگی۔

مثلاً مساوات ۲ لا^2 + ۵ لا - ۶ = ۰ میں

ب^2 - ۴ ا ج = ۵^2 - ۴ × ۲ × (-۶) = ۲۵ + ۴۸ = ۷۳ جو ایک مثبت
مقدار ہے اس لئے اس صورت میں اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہونی چاہئیں۔
ہم دیکھتے ہیں کہ اس مساوات کے لئے $لا = \frac{- ۵ \pm \sqrt{۲۵ + ۴۸}}{۴}$

$= \frac{- ۵ \pm ۸٫۵۴}{۴} = ۸۸ء$ یا $- ۳٫۳۸$ (دونوں اصلیں حقیقی اور غیر
مساوی ہیں)

جب علامت جذر کے اندر کی مقدار مثبت ہو تو ہم اس کا جذر نکال سکتے ہیں
اور اس طرح اصلوں کی تقریبی قیمتیں معلوم کرسکتے ہیں۔

اگر (۲) ب^2 - ۴ ا ج = منفی مقدار ہو تو اصلیں خیالی ہونگی
کیونکہ علامت جذر کے اندر جو مقدار ہے اس کے منفی ہونے کی وجہ
سے ہم اس کا جذر نہیں نکال سکتے۔

مثلاً $2\text{لا}^2 + 5\text{لا} + 6 = 0$ اس مساوات کے لئے علامت جذر کے اندر کی مقدار $= \text{ب}^2 - 4\text{ا ج} = 5^2 - 4 \times 2 \times 6 = 25 - 48$

$= -23 =$ منفی مقدار

اس صورت میں دونوں اصلیں خیالی ہونی چاہئیں۔ اور ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{لا} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 48}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{-23}}{4}$$

یعنی دونوں اصلیں فی الحقیقت خیالی ہیں، ہم -23 کا جذر نہیں نکال سکتے اس لئے اصلوں کی تقریبی قیمتیں بھی نہیں معلوم ہوسکتیں۔

اگر (۳) $\text{ب}^2 - 4\text{ا ج} = 0$ تو اصلیں مساوی ہونگی۔

کیونکہ اس صورت میں $\frac{-\text{ب} + \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{ا ج}}}{2\text{ا}} = -\frac{\text{ب}}{2\text{ا}}$

$$\frac{-\text{ب} - \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{ا ج}}}{2\text{ا}} = -\frac{\text{ب}}{2\text{ا}}$$

یعنی دونوں اصلیں ایک ہی مقدار $-\frac{\text{ب}}{2\text{ا}}$ کے مساوی ہیں

مثلاً مساوات $2\text{لا}^2 + 12\text{لا} + 18 = 0$ میں

$\text{ب}^2 - 4\text{ا ج} = 12^2 - 4 \times 2 \times 18 = 144 - 144 = 0$

پس مساوات کی اصلیں مساوی ہونی چاہئیں۔

اور وہ فی الحقیقت ہیں بھی کیونکہ $\frac{-\text{ب} + \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{ا ج}}}{2\text{ا}} = \frac{-12 + \sqrt{0}}{4} = -3$

اور $\frac{-\text{ب} - \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{ا ج}}}{2\text{ا}} = \frac{-12 - \sqrt{0}}{4} = -3$

ہر ایک اصل -3 کے مساوی ہے۔

مساوات $2\text{لا}^2 + 12\text{لا} + 18 = 0$ اس طرح لکھی جاسکتی ہے۔

= (لا² + ۶ لا + ۹) = ۰

یعنی ۲ (لا + ۳)² = ۰ یا ۲ (لا + ۳) (لا + ۳) = ۰

یعنی دائیں جانب کا رکن مربع کامل ہے، پس اصلیں لا = -۳ اور لا = -۳ ہیں۔

ہم نے اثنائے عمل میں دیکھا کہ اگر کسی مساوات میں ب² - ۴ ا ج = ۰ تو دائیں جانب کا جملہ درجہ دوم مربع کامل ہوتا ہے۔ پس ا لا² + ب لا + ج کی شکل کے جملہ درجہ دوم کے مربع کامل ہونے کے لئے یہ ضروری ہے کہ ب² - ۴ ا ج = ۰۔ یا برعکس اس کے اگر کسی جملہ درجہ دوم کے لئے ب² - ۴ ا ج = ۰ تو وہ جملہ مربع کامل ہوگا۔

پس یہ معلوم کرنے کے لئے کہ ایک مساوات درجہ دوم کی اصلیں کیسی ہیں حقیقی یا خیالی یا مساوی وغیرہ وغیرہ یہ ضروری نہیں کہ مساوات کو حل کیا جائے، صرف یہ معلوم کر لینا کافی ہے کہ اس مساوات کے لئے ب² - ۴ ا ج کی کیا علامت ہے۔

اگر مثبت ہے تو دونوں اصلیں حقیقی ہیں

اگر منفی " خیالی ہیں۔

اگر ب² - ۴ ا ج = ۰ تو " مساوی ہیں وغیرہ وغیرہ

مگر اصلوں کی نوعیت کے متعلق یہ بحث مسائل مساوات درجہ دوم سے تعلق رکھتی ہے جو اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔ ہمیں صرف مساوات درجہ دوم کے حل سے سروکار ہے۔

۴۰۔ متفرق مثالیں

مثال ۱۔ $34لا^2 - لا^4 = 225$ کو حل کرو۔

معیاری صورت میں لانے سے $لا^4 - 34لا^2 + 225 = 0$

اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے سے $(لا^2 - 9)(لا^2 - 25) = 0$

یعنی $لا^2 = 9$ یا 25 جس سے $لا = \pm 3$ یا ± 5

مثال ۲۔ $\frac{لا+3}{لا-3} - \frac{لا-5}{لا+5} = \frac{لا+7}{لا-7} - \frac{لا-1}{لا+1}$

طرفین مساوات کو الگ الگ مختصر کرنے سے

$$\frac{لا^2+8لا+15-(لا^2-8لا+15)}{(لا-3)(لا+5)} = \frac{لا^2+8لا+7-(لا^2-8لا+7)}{(لا-7)(لا+1)}$$

یعنی $\frac{16لا}{(لا-3)(لا+5)} = \frac{16لا}{(لا-7)(لا+1)}$

اسلئے $لا = 0$ یا $\frac{1}{(لا-3)(لا+5)} = \frac{1}{(لا-7)(لا+1)}$

یعنی $لا^2 + 2لا - 15 = لا^2 - 6لا - 7$

جس سے $8لا = 8$ یعنی $لا = 1$

پس $لا = 0$ اور $لا = 1$ مطلوبہ اصلیں ہیں۔

مثال ۳۔ $لا^2 - 4لا - \frac{60}{لا^2 - 4لا} = 17$

$لا^2 - 4لا$ کو ما کے مساوی رکھنے سے

$ما - \frac{60}{ما} = 17$ یعنی $ما^2 - 17ما - 60 = 0$

یعنی $(ما - 12)(ما - 5) = 0$

جس سے ما = ۱۲ یا ۵

لیکن ما کو ہم نے لا^{۲} − ۴ لا کے مساوی فرض کیا تھا اس لئے

لا^{۲} − ۴ لا = ۱۲ یا لا^{۲} − ۴ لا = ۵

پس لا^{۲} − ۴ لا − ۱۲ = ۰ یا لا^{۲} − ۴ لا − ۵ = ۰

یعنی (لا − ۶) (لا + ۲) = ۰ یا (لا − ۵) (لا + ۱) = ۰

پس لا = ۶، − ۲ یا ۵، − ۱

امثلہ نمبری ۹

مساوات ذیل کو حل کرو۔

۱- ۳ لا^{۲} − ۸ لا + ۴ = ۰
۲- ۶ لا^{۲} + لا − ۲ = ۰

۳- ۷ لا^{۲} = ۳ − ۲۰ لا
۴- ۲ لا^{۲} − ۵ لا + ۲ = ۰

۵- ۳ لا^{۲} − ۸ لا − ۳ = ۰
۶- ۲ لا^{۲} − ۷ لا − ۱۲ = ۰

۷- (لا − ۱)^{۲} = ۹
۸- (۲ لا + ۳)^{۲} = ۴۹

۹- (لا/۲ − ۳)^{۲} − ۳۶ = ۰
۱۰- ۱۳ لا + ۹ = ۱۰ لا^{۲}

۱۱- ۵ (۲ لا + ۳) + ۷ لا (۲ لا + ۳) = ۰

۱۲- (۲ لا + ۱) (لا − ۱) + (۳ + ۵ لا) (لا − ۱) = ۰

۱۳- (۲ لا − ۳)/۵ + ۳ (۲ لا − ۳)/۷ لا = ۰
۱۴- (۵ لا − ۷)/(۷ لا − ۵) = (لا − ۵)/(۲ لا − ۱۳)

۱۵- (۱) ۱۷ لا^{۲} + ۱۹ لا = ۱۸۴۸
(۲) (لا − ۳)/(لا + ۳) − (لا + ۳)/(لا − ۳) + ۶ ۶/۷ = ۰
کلکتہ میٹریکولیشن اختیاری

۱۶- لا/(لا + ۱) + (لا + ۱)/لا = ۲۵/۱۲
۱۷- ۴/(لا − ۱) − ۵/(لا + ۲) = ۳/لا

۱۸- ۲/(لا + ۳) + (لا + ۳)/۲ = ۱۰/۳
۱۹- ۲ لا/(لا − ۱) + (۳ لا − ۱)/(لا + ۲) − (۵ لا − ۱۱)/(لا − ۲) = ۰

۲۰- لا^{۲} − ۴٫۱ لا − ۱٫۵۱۳ = ۰
۲۱- لا^{۲} − ۴٫۱ لا = ۱٫۵۱

۲۲۔ ۳لا^{۲} − ۳کالا − ۱ =

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔ اگر ان مساواتوں میں اصلوں کی قیمتیں ٹھیک ٹھیک معلوم نہ ہوسکیں تو انہیں اعشاریہ کے دوسرے مقام تک صحیح طور پر دریافت کرو

۲۳۔ لا^{۲} − ۲لا − ۱ = ۰

۲۴۔ لا^{۲} − ۴لا + ۲ = ۰

۲۵۔ ۵لا^{۲} − ۹لا − ۴ = ۰

۲۶۔ (لا + ۱)(لا − ۴) + (لا + ۲)(لا − ۳) = ۰

۲۷۔ $\frac{۱}{لا + ۳} + \frac{۱}{لا + ۶} + \frac{۱}{لا + ۹} = ۰$

۲۸۔ ۲(لا + ۱) = $\frac{۴ − ۵لا}{لا − ۱}$

۲۹۔ لا^{۲} − ۲$\sqrt{۳}$ لا − ۶ = ۰

۳۰۔ ۹ = ۱۰لا^{۲} − لا^{۴}

۳۱۔ $\frac{۱۰۰}{لا^{۲}}$ = ۲۹ − لا^{۲}

۳۲۔ لا^{۴} + ۳۲۴ = ۴۵لا^{۲}

۳۳۔ لا^{۴} − ۱۳لا^{۲} + ۳۶ = ۰

۳۴۔ لا^{۶} − ۳۵لا^{۳} + ۲۱۶ = ۰

۳۵۔ لا^{۲} + $\frac{۱}{لا^{۲}}$ = $\frac{۲۵۷}{۱۶}$

۳۶۔ لا^{۲} + $\frac{ب^{۲}ج^{۲}}{لا^{۲}}$ = ب^{۲} + ج^{۲}

۳۷۔ لا^{۳} − ۱ = ۰

۳۸۔ لا^{۳} + ۱ = ۰

۳۹۔ ۲لا^{۳} + ۳لا^{۲} − ۸لا + ۳ = ۰

۴۰۔ ۴لا^{۳} − ۲لا^{۲} = ۳لا − ۲

۴۱۔ (لا + ۱)(لا + ۲)(لا + ۳)(لا + ۴) = ۲۴

۴۲۔ لا(لا + ۱)(لا + ۲)(لا + ۳) = ۱۲۰

۴۳۔ (لا + ۹)(لا − ۳)(لا − ۷)(لا + ۵) = ۳۸۵

۴۴۔ $\frac{لا − ۱}{لا + ۱} + \frac{لا − ۴}{لا + ۴} = \frac{لا − ۲}{لا + ۲} + \frac{لا − ۳}{لا + ۳}$

۴۵۔ $\frac{۱}{لا + ۱} − \frac{۲}{لا + ۵} = \frac{۱}{۲لا + ۱} − \frac{۳}{۲(لا + ۲)}$

۴۱۔ اب ہم چند ایسے عبارتی سوالات حل کریں گے جن سے درجہ دوم کی

مساواتیں پیدا ہوتی ہیں۔

مثال ۱ — دو عددوں کا فرق ۴ ہے اور انکے مربعوں کا مجموعہ ۱۰۶ ہے، انہیں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ایک عدد لا ہے، دوسرا لا + ۴ ہوگا

بموجب شرائط سوال $لا^{۲} + (لا + ۴)^{۲} = ۱۰۶$

یعنی $۲لا^{۲} + ۸لا + ۱۶ = ۱۰۶$

$۲لا^{۲} + ۸لا - ۹۰ = ۰$

یعنی $لا^{۲} + ۴لا - ۴۵ = ۰$

$(لا + ۹)(لا - ۵) = ۰$

اس لئے $لا = -۹$ یا ۵

اگر لا کو ۵ کے مساوی فرض کیا جائے تو چھوٹا عدد ۵ ہے اور بڑا عدد ۵ + ۴ = ۹، پس ایک عددوں کا جوڑا جو شرائط مساوات کو پورا کرتا ہے ۵، ۹ ہے

اسی طرح اگر $لا = -۹$ تو بڑا عدد ہوگا $-۹ + ۴ = -۵$

پس دوسرا جوڑا −۹، −۵ ہے

مثال ۲ — ایک ریل گاڑی یکساں رفتار سے ۷۵۰ میل فاصلہ کرتی ہے، اگر اس کی رفتار ۵ میل فی گھنٹہ کم ہوتی تو یہی فاصلہ طے کرنے میں اس کو ۵ گھنٹے اور لگتے، گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔

فرض کرو کہ گاڑی کی رفتار لا میل فی گھنٹہ ہے۔

لا میل فی گھنٹہ کی یکساں رفتار سے ۷۵۰ میل فاصلہ طے کرنے میں $\frac{۷۵۰}{لا}$ گھنٹے صرف ہونگے اور لا − ۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے وہی فاصلہ طے کرتے میں

$\frac{۷۵۰}{لا - ۵}$ گھنٹے لگینگے

اسلئے شرائط سوال کے مطابق $\frac{\text{۷۵۰}}{\text{لا}} = \frac{\text{۷۵۰}}{\text{لا} - \text{۵}} - \text{۵}$ .... (۱)

ضرب دینے سے $\text{۷۵۰}(\text{لا} - \text{۵}) = \text{۷۵۰}\,\text{لا} - \text{۵}\,\text{لا}(\text{لا} - \text{۵})$

$$\text{۵}\,\text{لا}^2 - \text{۲۵}\,\text{لا} - \text{۳۷۵۰} = \text{۰}$$

$$\text{لا}^2 - \text{۵}\,\text{لا} - \text{۷۵۰} = \text{۰}$$

$$(\text{لا} - \text{۳۰})(\text{لا} + \text{۲۵}) = \text{۰}$$

جس سے　$\text{لا} = \text{۳۰}$ یا $-\text{۲۵}$

پس ریل گاڑی ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جاتی ہے منفی جواب ناقابل تسلیم ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ ہر مساوات درجہ دوم کی دو اصلیں ہوتی ہیں عبارتی سوالوں کے حل کرنے میں جو مساواتیں رونما ہونگی ہم دیکھیں گے کہ انکی بعض اصلیں شرائط سوال کو پورا نہیں کرینگی موجودہ قیمت میں منفی رفتار سے یہ مراد ہوگی کہ گاڑی ۲۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے پیچھے کی طرف جاتی ہے۔

یا شرائط سوال کی مناسب ترمیم سے ہم منفی جواب کو کچھ معنی پہنا سکتے ہیں $\text{لا} = \text{۳۰}$ اور $-\text{۲۵}$ شرائط مساوات (۱) کو پورا کرتی ہیں، اگر ہم لا کی بجائے $-$لا لکھدیں تو مساوات محصلہ ہوگی

$$\frac{\text{۷۵۰}}{-\text{لا}} = \frac{\text{۷۵۰}}{-\text{لا} - \text{۵}} - \text{۵} \quad \text{.........} \quad (\text{۲})$$

اور اس مساوات کی اصلیں $-\text{۳۰}$ اور ۲۵ ہونگی

اب مساوات (۲) کی علامات دونوں طرف بدلنے سے

$$\frac{\text{۷۵۰}}{\text{لا}} = \frac{\text{۷۵۰}}{\text{لا} + \text{۵}} + \text{۵}$$

اور یہ ذیل کے عبارتی سوال کی جبریہ صورت ہے۔

ایک گاڑی ۷۵۰ میل یکساں رفتار سے جاتی ہے، اگر اس کی رفتار ۵ میل فی گھنٹہ زیادہ ہوتی تو فاصلہ طے کرنے میں اسے ۵ گھنٹے کم صرف ہوتے، گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔

مثال ۳۔ ایک شخص نے اپنا گھوڑا ۱۰۵ روپیہ کو بیچا، اس کا نقصان فیصد روپوں کی اس تعداد کا ۱/۵ تھا جو اس نے گھوڑے کی خرید میں ادا کی، گھوڑے کی قیمت خرید معلوم کرو۔

فرض کرو کہ گھوڑے کی قیمت خرید لا روپیہ ہے

نقصان فیصد = لا/۵

گھوڑے کی قیمت خرید لا روپیہ پر نقصان = لا × لا/(۵×۱۰۰) = لا²/۵۰۰ روپیہ

قیمت فروخت = (لا − لا²/۵۰۰) روپیہ

اس لئے لا − لا²/۵۰۰ = ۱۰۵

یا لا² − ۵۰۰ لا + ۵۲۵۰۰ = ۰

یعنی (لا − ۳۵۰) (لا − ۱۵۰) = ۰

پس لا = ۳۵۰ یا ۱۵۰

اور ان میں سے ہر ایک قیمت شرائط سوال کو پورا کرتی ہے۔

پس قیمت خرید ۳۵۰ روپیہ ہے یا ۱۵۰ روپیہ

مثال ۴۔ دو نلیاں ملکر ایک حوض کو ۱۲ منٹ میں بھر دیتی ہیں، اگر بڑی نلی اسی حوض کو چھوٹی نلی کی نسبت ۱۰ منٹ کم عرصہ میں بھر دے تو بتاؤ کہ یہ نلیاں فرداً فرداً حوض کو کتنی دیر میں بھر دینگی

فرض کرو کہ نلیاں الگ الگ حوض کو لا اور لا − ۱۰ منٹ میں

بالترتیب بھر دیتی ہیں۔

اگر یہ ایک ساتھ کھولدی جائیں تو یہ دونوں ملکر ایک منٹ میں حوض کا $\left(\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا} - 10}\right)$ واں حصہ بھر دینگی، لیکن حسب مفروض یہ ایک منٹ میں حوض کا $\frac{1}{12}$ واں حصہ بھرتی ہیں؛ اسلئے

$$\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا} - 10} = \frac{1}{12}$$

یعنی $12(2\,\text{لا} - 10) = \text{لا}(\text{لا} - 10)$

پس $\text{لا}^2 - 34\,\text{لا} + 120 = 0$

جس سے $(\text{لا} - 30)(\text{لا} - 4) = 0$

پس $\text{لا} = 30$ یا 4

اسلئے معلوم ہوا کہ چھوٹی نلی حوض کو ۳۰ منٹ میں اور بڑی ۲۰ منٹ میں بھر دیگی۔ دوسرا حل ۴ ناقابل تسلیم ہے۔

مثال ۵۔ وسطی تقسیم ایک مفروضہ خط مستقیم کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ کل خط اور ایک حصہ کی سطح دوسرے حصہ کے مربع کے مساوی ہو یا دوسرے الفاظ میں فرض کرو کہ ایک خط ا ب کا طول ا ہے، اس پر ایک ایسا نقطہ ن معلوم کرو کہ

ا ——————————— ب

$$\text{ا ب} \times \text{ب ن} = \text{ا ن}^2$$

فرض کرو کہ

$$\text{ا ن} = \text{لا} \quad \text{تب} \quad \text{ب ن} = \text{ا} - \text{لا}$$

اب چونکہ $\text{ا ب} \times \text{ن ب} = \text{ا ن}^2$

اسلئے $\text{ا}(\text{ا} - \text{لا}) = \text{لا}^2$

یعنی $\text{لا}^2 + \text{ا}\,\text{لا} - \text{ا}^2 = 0$

پس $لا = \frac{-ا \pm \sqrt{ا^۲ + ۴ا^۲}}{۲} = \frac{-ا \pm \sqrt{۵ا^۲}}{۲} = \frac{-ا \pm ا\sqrt{۵}}{۲}$

یعنی لا کی دو قیمتیں یہ ہیں $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} ا$ یا $-\left(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\right) ا$

پس اب کی وسطی تقسیم داخلاً اور خارجاً دونوں طرح ہو سکتی ہے

(داخلاً) ب ج ، اب سے زاویہ قائمہ بناتا ہے اور اس کا طول $= \frac{ا}{۲}$

اسلئے $اج^۲ = اب^۲ + بج^۲$

$= ا^۲ + \frac{ا^۲}{۴} = \frac{۵ا^۲}{۴}$

اسلئے $اج = \frac{\sqrt{۵}\,ا}{۲}$ ، ج د کو ب ج کے مساوی بناؤ اور ا ن کو ا د کے مساوی کاٹو۔

اسلئے $اج = \frac{\sqrt{۵}\,ا}{۲}$ ، ج د کو ب ج کے مساوی بناؤ اور ان کو اد کے مساوی کاٹو۔

$لا = ان = اد = اج - دج = \frac{\sqrt{۵}}{۲} ا - \frac{ا}{۲} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} ا$

(خارجاً)

ب ج ⊥ اب

$بج = \frac{ا}{۲}$ اس لئے $اج = \frac{\sqrt{۵}}{۲} ا$

ج د کو ج ب کے مساوی بڑھاؤ اب $اد = \frac{\sqrt{۵}}{۲} ا + \frac{ا}{۲}$

ب ا کو خارج کر کے ا لا کو ا د کے مساوی کاٹو ، لا مطلوبہ نقطۂ تقسیم ہے۔

امثلہ نمبری ۱۰

۱۔ دو عددوں کی باہمی نسبت $\frac{5}{6}$ ہے اور ان کا حاصل ضرب ۱۲۱۵ ہے انہیں معلوم کرو۔

۲۔ ایک مثبت عدد معلوم کرو جو اپنے مکافی کے مساوی ہو۔

۳۔ تین عددوں کی باہمی نسبت ۳ : ۴ : ۵ ہیں اور انکے مربعوں کا مجموعہ ۱۲۵۰ ہے، انہیں معلوم کرو۔

۴۔ ایک مثلث قائم الزاویہ کا وتر ۱۵ سنٹی میٹر ہے اور باقی دو اضلاع کی نسبت ۳ : ۴ ہے، اضلاع کے طول معلوم کرو۔

۵۔ ایک مثلث قائم الزاویہ کا وتر ۲ ہے اور اضلاع مساوی ہیں، اضلاع معلوم کرو۔

۶۔ ایک مستطیل کا رقبہ ۵۸۸ مربع فٹ ہے اور اس کے اضلاع کی نسبت ۳ : ۴ ہے، اضلاع کا طول معلوم کرو۔

۷۔ ایک شخص اپنے لڑکے سے ۵ گنا بڑا ہے اور ان کی عمروں کے مربعوں کا مجموعہ ۹۳۶ ہے، ان کی عمریں معلوم کرو۔

۸۔ صحیح متصل عددوں کے ایسے جوڑے معلوم کرو جنکے حاصل ضرب ۳۴۲ اور ۲۱۰ ہوں۔

۹۔ دو صحیح متصل عدد معلوم کرو جن کے مربعوں کا مجموعہ ۳۱۳ ہو۔

۱۰۔ دو صحیح متصل عدد معلوم کرو جن کے مربعوں کا مجموعہ ۱۱۰۵ ہو۔

۱۱۔ تین متصل صحیح عدد معلوم کرو جن کے مربعوں کا مجموعہ ۴۳۴ ہو۔

۱۲۔ دو متصل صحیح عدد معلوم کرو جن کے مکعبوں کا فرق ۱۲۷ ہو۔

۱۳۔ تین متصل طاق عدد معلوم کرو جن کے مربعوں کا مجموعہ ۲۵۱ ہو۔

۱۴ — ایسا عدد دریافت کرو جس کا مربع اس کے دو چند سے بقدر ۱۲۹۵ کے بڑا ہو۔

۱۵ — اگر ایک عدد کے مربع میں اس کا سہ چند جمع کر دیا جائے تو حاصل جمع ۵۹۸ ہوتا ہے، وہ عدد معلوم کرو۔

۱۶ — ایسے دو عدد معلوم کرو جن کا فرق ۳ ہو اور جن کے مربعوں کا مجموعہ ۱۸۵ ہو۔

۱۷ — دو متصل صحیح اعداد کے متکافیوں (اُلٹوں) کا مجموعہ $\frac{25}{156}$ ہے، انہیں معلوم کرو۔

۱۸ — دو عددوں کا مجموعہ ۴۵ ہے اور انکے متکافیوں کا مجموعہ $\frac{9}{100}$ ہے، انہیں معلوم کرو۔

۱۹ — دو عددوں کا فرق ۵ ہے اور ان کے متکافیوں کا فرق ۱ء سے ہے، انہیں معلوم کرو۔

۲۰ — ۲۸ سال کے بعد ایک شخص کی عمر اسکی ۲۸ سال پہلے کی عمر کے مربع کے مساوی ہوگی، اس کی موجودہ عمر معلوم کرو۔

۲۱ — اگر ایک ریل گاڑی کی رفتار ۵ میل فی گھنٹہ زیادہ ہوتی تو ۱۵۰ میل کا فاصلہ طے کرنے میں اسے ایک گھنٹہ کم لگتا، گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔

۲۲ — ایک شخص ۱۰۸ میل چلتا ہے، اگر اس کی رفتار ۲ میل فی گھنٹہ زیادہ ہوتی تو وہ اس مسافت کو $\frac{1}{2}$۴ گھنٹہ کم عرصہ میں طے کر لیتا، اسکی رفتار معلوم کرو۔

۲۳ — جتنے عرصہ میں ایک ریل گاڑی ۲۰۹ میل کا فاصلہ طے کرتی ہے اس سے ۱۶ منٹ کم عرصہ میں یہ فاصلہ طے ہو سکتا ہے بشرطیکہ گاڑی کی رفتار ایک میل فی گھنٹہ زیادہ کر دی جائے، گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔

۲۴ — اگر ایک گاڑی کا پہیہ جسکا محیط $\frac{2}{3}$۱۴ فٹ ہے ایک چکر لگانے میں ایک سکنڈ زیادہ لے تو گاڑی کی رفتار $\frac{2}{3}$۲ میل فی گھنٹہ کم ہو گی، گاڑی کی

رفتار معلوم کرو۔

۲۵۔ ایک شخص نے ایک گھڑی ۹۶ روپیہ کو بیچی اور جتنے روپیہ میں اسے خریدا اتنا ہی فیصد نفع اٹھایا، اس کی قیمت خرید معلوم کرو۔

۲۶۔ ایک شخص نے اپنی موٹر سیکل کو ۱۶ پونڈ میں بیچا اور جتنے پونڈ اسکی قیمت خرید تھی اتنے فیصد نقصان اٹھایا، سیکل کی قیمت خرید معلوم کرو۔

۲۷۔ ایک شخص نے لا روپیہ کو گھوڑا خریدا اور ۳۷۵ روپیہ کو لا فی صد کے نفع پر بیچ دیا، لا معلوم کرو۔

۲۸۔ ا اور ب ملکر ایک کام کو ۲ دن میں کر لیتے ہیں، اسی کام کو ختم کرنے میں ا، ب کی نسبت ۳ دن زیادہ لیتا ہے، بتاؤ کہ ب اس کو کتنے دن میں ختم کر سکتا ہے۔

۲۹۔ ایک خاص کام کی تکمیل میں ا، ب کی نسبت ۵ دن زیادہ لیتا ہے اور ج کی نسبت ۹ دن زیادہ، ا اور ب دونوں ملکر اس کام کو اتنے ہی عرصہ میں کر لیتے ہیں جتنے میں ج کرتا ہے، بتاؤ کہ تینوں الگ الگ اسے کتنے عرصہ میں کر سکیں گے۔

۳۰۔ ایک مستطیل کھیت کا رقبہ ۲۰۰۰ مربع گز ہے اور اس کا مجموعہ اضلاع ۱۸۰ گز ہے، اس کے اضلاع کا طول معلوم کرو۔

۳۱۔ ایک مستطیل کھیت کا ایک ضلع دوسرے کی نسبت بقدر ۷۰ فٹ کے بڑا ہے اور اس کا رقبہ ۴۹۴۰۰ مربع فٹ ہے، اسکے اضلاع معلوم کرو۔

۳۲۔ مستطیل شکل کے دو کھیتوں کا رقبہ ایک ہی ہے ۸۰۰ مربع گز، لیکن ان کے طولوں کا فرق ۱۰۰ گز ہے اور عرضوں کا فرق ۴ گز، انکے اضلاع معلوم کرو

۳۳۔ ایک مستطیل کھیت ۵۰ فٹ لمبا اور ۳۴ فٹ چوڑا ہے، اس کے

چاروں طرف باہر کی طرف یکساں چوڑائی کا ایک راستہ ہے جس کا رقبہ ۵۴۰۰ مربع فٹ ہے، اس کی چوڑائی معلوم کرو۔

۳۴ — مربع پتھروں سے ایک کمرہ کی فرش بندی کرنے کے لئے ۳۶۰ پتھر درکار ہوتے ہیں، اگر ہر ایک پتھر ایک انچ زیادہ لمبا اور ایک انچ زیادہ چوڑا ہو تو ۲۵۰ پتھروں کی ضرورت ہوتی ہے، پتھروں کے ابعاد معلوم کرو۔

۳۵ — دو نلیاں ملکر ایک حوض کو ۴۰ منٹ میں بھر دیتی ہیں اور بڑی نلی اس کو بھرنے میں چھوٹی نلی کی نسبت ایک گھنٹہ کم لیتی ہے، بتاؤ کہ چھوٹی نلی اس کو کتنے منٹ میں بھر سکتی ہے۔

۳۶ — انڈوں کی قیمت میں ۲ آنہ فی درجن تخفیف ہونے کے باعث ۲ روپیہ ۱۰ آنہ میں معمول سے ۶ زیادہ انڈے آسکتے ہیں، انڈوں کی قیمت فی درجن معلوم کرو۔

۳۷ — میں نے ایک صد روپیہ میں کرکٹ کھیلنے کے چند گیند خریدے، اگر قیمت خرید فی گیند ایک روپیہ کم ہوتی تو اسی رقم میں ۵ گیند اور خرید ہوسکتے ہیں، ہر گیند کی قیمت دریافت کرو۔

۳۸ — خط اب کا طول (ا ——— ب ج) ۱۰ انچ ہے، اب کو ج تک اتنا خارج کرو کہ اج × ب ج = ۳۹ مربع انچ، اج اور ب ج کے طول معلوم کرو۔

۳۹ — خط اب کا طول ۲۰ انچ ہے، اسکو دو حصوں اج اور ج ب میں اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ اج خطوط ج ب اور اب کے درمیان وسط متناسب ہے، اج کا طول معلوم کرو۔

۴۰ — اگر اب = ا تو اوپر کے سوال کو حل کرو۔

مساوات درجہ دوم کا ترسیمی حل

۴۲- ہر مساوات درجہ دوم کو معیاری صورت میں لانے سے مساوات کے دائیں جانب ایک جملہ درجہ دوم رہ جاتا ہے اور دوسری طرف صفر، مثلاً مساوات لا² - ۱۱ = ۷لا کو معیاری صورت میں لانے سے حاصل ہوگا لا² - ۷ لا + ۱۱ = ۰

موخرالذکر صورت میں مساوات کے دائیں طرف کا رکن لا² - ۷لا + ۱۱ لا کا ایک جملہ یا تفاعل درجہ دوم ہے کیونکہ لا کی بڑی سے بڑی قوت اس میں دو ہے، اب اگر لا مختلف قیمتیں اختیار کرے تو یہ تفاعل لا² - ۷ لا + ۱۱ بھی مختلف قیمتیں اختیار کریگا اور لا کی ہر ایک قیمت کے جواب میں لا² - ۷ لا + ۱۱ کی ایک اور صرف ایک قیمت ہوگی، پس اگر بلحاظ دو قائم محوروں کے لا کی قیمتوں کو بطور فصلہ اور لا² - ۷ لا + ۱۱ کی متناظر قیمتوں کو بطور معین مرتسم کیا جائے تو لا اور لا² - ۷ لا + ۱۱ کی متناظر قیمتوں کے ہر ایک جوڑے سے ایک نقطہ حاصل ہوگا اور ایسی متناظر قیمتوں کے بیشمار جوڑوں سے بیشمار نقطے ملینگے جن کو ملانے سے ایک منحنی حاصل ہوگا جو جملہ درجہ دوم یا تفاعل لا² - ۷ لا + ۱۱ کی ترسیم ہوگا دیکھو دفعہ ۴۳-

طالب علم اس ترسیم پر کوئی نقطہ لے اور اس کے محددوں پر غور کرے ایسے کسی نقطہ کا فصلہ لا کی ایک قیمت ہے اور اس کا معین تفاعل لا² - ۷ لا + ۱۱ کی متناظر قیمت ہے، پس لا کی مختلف قیمتوں کے لئے اس ترسیم کے معین تفاعل لا² - ۷ لا + ۱۱ کی مختلف قیمتوں کو

تعبیر کرتے ہیں۔ ہم لا اور تفاعل لا۲ - ۷ لا + ۱۱ کے باہمی رشتہ سے بخوبی واقف ہیں، لا کی کسی ایک قیمت کے ساتھ تفاعل لا۲ - ۷ لا + ۱۱ کی ایک قیمت لگی ہوئی ہے اور تفاعل کی کسی ایک قیمت کے ساتھ لا کی ایک قیمت وابستہ ہے، اب اگر ان میں سے کسی ایک کی کوئی قیمت دی ہوئی ہو تو اس ترسیم کی مدد سے دوسرے کی متناظر قیمت فقط پیمایش سے معلوم ہوسکتی ہے مثلاً اگر لا = ۲ تو فصلہ ۲ کے جواب میں جو معین ہے اس کا طول لا۲ - ۷ لا + ۱۱ کی متناظر قیمت ہے اور برعکس اس کے اگر لا۲ - ۷ لا + ۱۱ کی کسی مقررہ عددی قیمت (مثلاً -۱) کے لئے ہمیں لا کی متناظر قیمت معلوم کرنا منظور ہو تو ہمیں شکل میں اس مقررہ طول (-۱) کا ایک معین قائم کرنا چاہیئے، اس معین کے جواب میں جو فصلہ ہے اس کا طول لا کی متناظر قیمت ہے۔

اب بالخصوص فرض کرو کہ تفاعل لا۲ - ۷ لا + ۱۱ صفر کے مساوی ہے اور تفاعل کی اس قیمت (صفر) کے جواب میں ہم لا کی متناظر قیمت یا قیمتیں معلوم کرنا چاہتے ہیں یا بالفاظ دیگر ہمیں شکل سے لا کی وہ قیمت یا قیمتیں معلوم کرنا ہے جو لا۲ - ۷ لا + ۱۱ کو صفر بنا دیں۔

اس صورت میں چونکہ لا۲ - ۷ لا + ۱۱ = ۰ اسلئے معین زیر بحث کا طول صفر ہوگا۔ پس ہمیں شکل میں ترسیم پر کے ان نقاط کی تلاش کرنی چاہیئے جن کے معین صفر ہوں، ظاہر ہے کہ ایسے نقطے صرف وہی ہو سکتے ہیں جہاں ترسیم محور لا سے ملتی ہے۔

کیونکہ اس محور کے ہر نقطہ کا ما' محدد صفر ہے، پس جن نقاط پر منحنی محور لا سے ملتا ہے انکے معین صفر ہیں (یعنی ان نقاط کے لیئے

لا۲ - ۷ لا + ۱۱ = ۰ اسلئے انکے فصلے لا کی مطلوبہ قیمتیں ہیں۔

اب ہم نے ایک ضروری سوال کو حل کرلیا، ہم نے ترسیم کی مدد سے لا کی وہ قیمتیں معلوم کرلیں جو لا۲ - ۷ لا + ۱۱ کو صفر بنا دیں یعنی ہم نے مساوات لا۲ - ۷ لا + ۱۱ = ۰ کی اصلیں معلوم کرلیں کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ مساوات لا۲ - ۷ لا + ۱۱ = ۰ کے حل یا اصل سے لا کی وہ قیمت یا قیمتیں مراد ہیں جو طرفین مساوات کو برابر کردیں یعنی جو تفاعل لا۲ - ۷ لا + ۱۱ کو صفر کے مساوی بنا دیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ ترسیم اور محور لا کے نقاط تقاطع کے فصلے اس شرط کو پورا کرتے ہیں۔

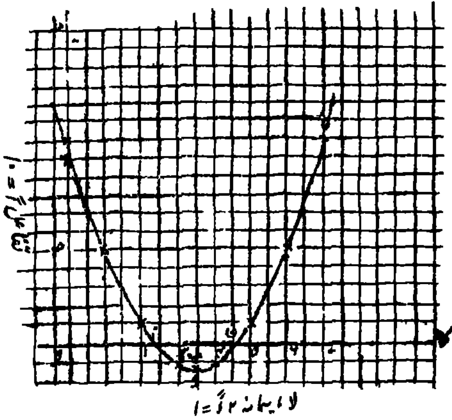
پس مساوات لا۲ - ۷ لا + ۱۱ = ۰ کو ترسیمی طریق پر حل کرنے کے لئے ہم نے اسے معیاری صورت میں لکھا، وائیں جانب کے جملہ درجہ دوم یا تفاعل کی ترسیم بنائی، جن نقاط پر یہ ترسیم محور لا کو قطع کرتی ہے ان کے فصلوں کے طول مساوات لا۲ - ۷ لا + ۱۱ = ۰ کی اصلیں ہیں۔

اور بالعموم مساوات ا لا۲ + ب لا + ج = ۰ کو ترسیمی طریق پر حل کرنے کے لئے ہمیں ا لا۲ + ب لا + ج کی ترسیم بنانی چاہیئے، جن نقاط پر یہ ترسیم محور لا سے ملتی ہے انکے فصلے مساوات ا لا۲ + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں ہیں۔

۱۴۴- اس دفعہ کی جملہ امثلہ کو طالب علم غور سے پڑھے اور مختلف پیمانوں پر شکلیں بنا کر خود انہیں حل کرے، قریب ترین درجہ صحت تک نتائج حاصل کرنے کی کوشش کیجائے۔

مثال ۱- لا۲ - ۷ لا + ۱۱ کی ترسیم بناؤ اور مساوات لا۲ - ۷ لا + ۱۱ = ۰ کی اصلیں معلوم کرو۔

اثناۓ عمل میں دیکھو کہ لا^2 - ۷ لا + ۱۱ کی کم سے کم قیمت کیا ہے؟ نیز لا کی کن حقیقی قیمتوں کے لئے یہ تفاعل مثبت ہے اور کن کے لئے منفی



حسب دفعہ سابق ہم تفاعل لا^2 - ۷ لا + ۱۱ کی ترسیم بناتے ہیں، طالب علم جانتا ہے کہ یہاں دو متغیر لا اور لا^2 - ۷ لا + ۱۱ ہیں، لا کی قیمتوں کو محور لا پر ناپو، پیمانہ ایک انچ = ۵ یعنی دو چھوٹے حصے = ۱

لا^2 - ۷ لا + ۱۱ کی قیمتوں کو محور ما پر ناپو، پیمانہ ایک انچ = ۱۰ یعنی ایک چھوٹا حصّہ = ۱

حسب

لا = ۰	۱	۲	۳	۳٫۵	۴	۵	۶	۷
لا^2 = ۰	۱	۴	۹	۱۲٫۲۵	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹
-۷ لا + ۱۱ = ۱۱	۴	-۳	-۱۰	-۱۳٫۵	-۱۷	-۲۴	-۳۱	-۳۸
لا^2 - ۷ لا + ۱۱ = ۱۱	۵	۱	-۱	-۱٫۲۵	-۱	۱	۵	۱۱

اسلئے (۰، ۱۱)، (۱، ۵)، (۲، ۱)، (۳، -۱) (۳٫۵، -۱٫۲۵)، .... ترسیم پر کے نقطے ہیں، شکل بالا میں انہیں مرتسم کر کے ایک منحنی ان نقاط میں سے کھینچا گیا ہے جو لا^2 - ۷ لا + ۱۱ کی ترسیم ہے۔

یہ ترسیم محور لا سے دو نقاط م اور ن پر ملتی ہے، ان نقطوں کے معین صفر ہیں یعنی ان نقاط کے لئے $لا^۲ - ۷ لا + ۱۱$ صفر کے مساوی ہے پس ان نقطوں کے فصلے لا کی مطلوبہ قیمتیں ہیں جو مساوات $لا^۲ - ۷ لا + ۱۱ = ۰$ کو پورا کرتی ہیں۔

م کا فصلہ = ۲٫۴

اور ن کا فصلہ = ۴٫۶

اس لئے ۲٫۴ اور ۴٫۶ مساوات مفروضہ $لا^۲ - ۷ لا + ۱۱ = ۰$ کی اصلیں ہیں۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ نقاط م اور ن کے درمیان منحنی کا جو حصہ ہے وہ محور لا سے نیچے واقع ہے یعنی $لا^۲ - ۷ لا + ۱۱$ کی قیمت منفی ہے جب تک کہ لا کی قیمت ۲٫۴ اور ۴٫۶ کے درمیان واقع ہے لیکن لا کی باقی سب قیمتوں کے لئے $لا^۲ - ۷ لا + ۱۱$ مثبت ہے۔

$لا^۲ - ۷ لا + ۱۱$ کی کم سے کم جبریہ قیمت بڑے سے بڑے منفی معین اب = ـ ۱٫۲۵ سے تعبیر ہوگی۔ جبریہ طریق پر بھی یہ قیمت بآسانی معلوم ہو سکتی ہے۔

$لا^۲ - ۷ لا + ۱۱ = (لا - \frac{۷}{۲})^۲ - \frac{۵}{۴}$، اب لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے $(لا - \frac{۷}{۲})^۲$ مثبت ہے اور صفر سے زیادہ ہے سوائے اس صورت کے جبکہ $لا = \frac{۷}{۲}$، پس اگر $لا = \frac{۷}{۲}$ تو $لا^۲ - ۷ لا + ۱۱ = (لا - \frac{۷}{۲})^۲ - \frac{۵}{۴} = - \frac{۵}{۴}$ جو اس تفاعل کی کم سے کم قیمت ہے۔

نوٹ ـ جبریہ طریق پر مساوات $لا^۲ - ۷ لا + ۱۱ = ۰$ کو حل کرنے سے

$$لا = \frac{۷ \pm \sqrt{۴۹ - ۴۴}}{۲} = \frac{۷ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

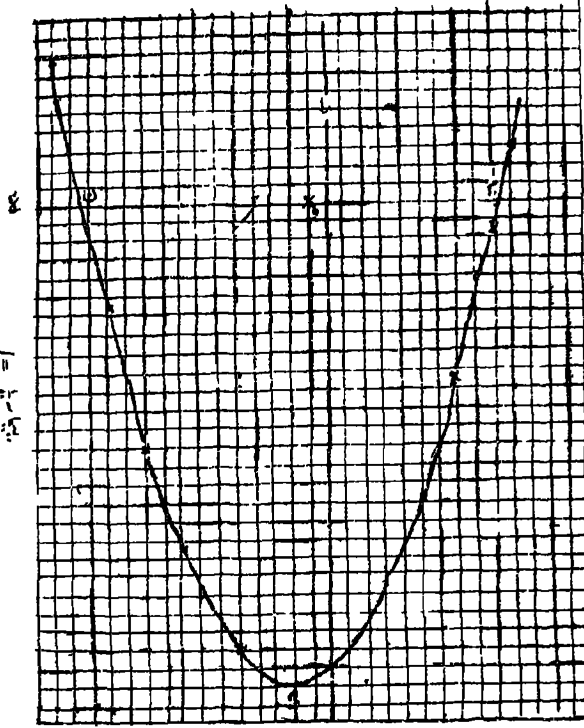
اگر ماۃ کی تقریبی قیمت ۲٫۲۳۶ فرض کی جائے تو لا کی قیمتیں ۱٫۶۴ ؍ ۰ اور ۲٫۳۸۲ حاصل ہوتی ہیں -

مثال ۲ -

ترسیمی طریق سے مساوات

۵ لا² + ۴ لا - ۲۵ = ۰

کو حل کرو - سب سے پہلے ہم ۵ لا² + ۴ لا - ۲۵ کی ترسیم بنائیں گے ، اختصار کی خاطر فرض کرو کہ



ما = ۵ لا² + ۴ لا - ۲۵

لا = ۰	۰٫۶	۱	۱٫۴	٫۸	۲	۱-	۱٫۶-	۲-	۲٫۴-	۳-
۵ لا² = ۰	۱٫۸۰	۵	۹٫۸۰	۲۱٫۲۰	۲۰	۵	۱۲٫۸۰	۲۰	۲۸٫۸	۴۵
۴ لا - ۲۵ = - ۲۵	۲۲٫۶-	۲۱-	۱۹٫۴-	۱۶٫۸-	۱۶-	۲۹-	۳۱٫۴-	۳۳-	۳۴٫۶-	۳۷-
ما = ۵ لا² + ۴ لا - ۲۵ = - ۲۵	۲۰٫۸-	۱۶-	۹٫۶	۱٫۶-	۳	۲۴-	۱۸٫۶-	۱۳-	۵٫۸-	۸

لا کی قیمتوں کو محور لا پر ناپو ، پیمانہ ۱" = ۲

تفاعل ۵ لا^۲ + ۴ لا − ۲۵ کی قیمتوں کو محور ما پر ناپو بپیمانہ اً = ۱۰
نقاط (۰ء۶، −۲۰ء۸)، (۱، −۱۶)، (۱ء۴، −۹ء۶)، (۲، ۳) وغیرہ وغیرہ
کو مرتسم کرنے سے اوپر کی ترسیم بنائی گئی ہے، جن نقاط م اور ن پر
یہ ترسیم محور لا کو قطع کرتی ہے اُن کے فصلے مساوات کی مطلوبہ اصلیں ہیں

و م = ۱ء۹ تقریباً

اور و ن = −۲ء۷

پس ۱ء۹ اور −۲ء۷ مساوات ۵ لا^۲ + ۴ لا − ۲۵ = ۰
کی اصلیں ہیں۔

تصدیق جب لا = ۱ء۹ تو ۵ لا^۲ + ۴ لا − ۲۵ = ۵(۳ء۶۱) + ۷ء۶ − ۲۵
= ۱۸ء۰۵ + ۷ء۶ − ۲۵
= ۰ء۶۵

پس جب لا = ۱ء۹ تو ۵ لا^۲ + ۴ لا − ۲۵ تقریباً صفر کے مساوی ہے
اسلئے ۱ء۹ ایک اصل ہے، اسی طرح طالب علم اس کی تصدیق
کرے کہ −۲ء۷ بھی مساوات معلومہ کی اصل ہے۔

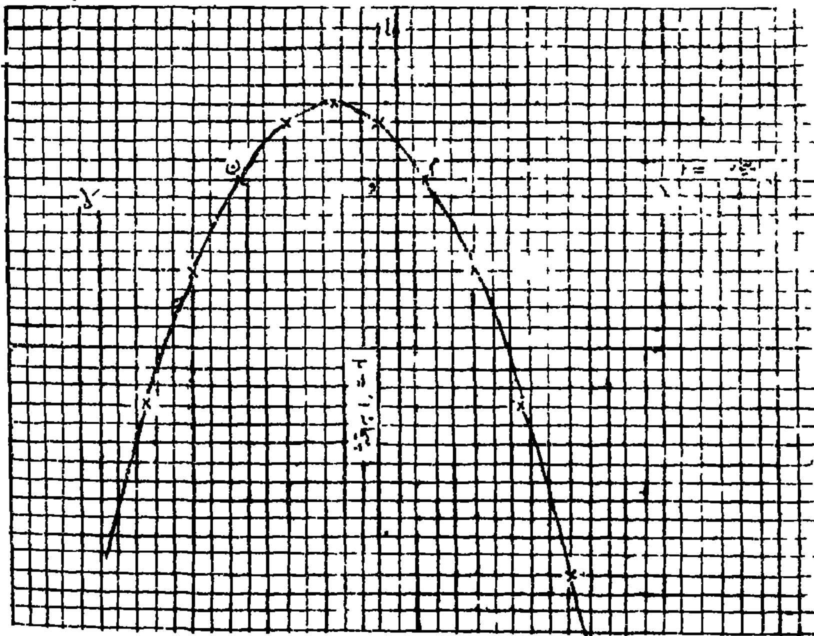
ہم دیکھتے ہیں کہ لا کی قیمتوں −۲ء۷ اور ۱ء۹ کے
درمیان جو ترسیم کا حصہ ہے وہ محور لا کے نیچے واقع ہے یعنی اس
حصہ کے سب معین منفی ہیں، پس لا کی اُن تمام حقیقی قیمتوں کے لئے
جو −۲ء۷ اور ۱ء۹ کے درمیان واقع ہیں ۵ لا^۲ + ۴ لا − ۲۵
منفی ہے لیکن ان حدود کے باہر باقی سب قیمتوں کے لئے یہ مثبت ہے۔
نیز بڑے سے بڑا منفی معین تقریباً ۲۵ء۸ ہے جو ا میں سے
گزرتا ہے، پس ۵ لا^۲ + ۴ لا − ۲۵ کی کم سے کم جبریہ قیمت −۲۵ء۸ ہے

مثال ۳- ا = ۳ - ۴ لا - ۴ لا^{۲} کی ترسیم بناؤ۔

اس کی مدد سے ۴ لا^{۲} + ۴ لا - ۳ = ۰ کی اصلیں معلوم کرو، نیز ثابت کرو کہ جملہ ۳ - ۴ لا - ۴ لا^{۲} مثبت ہے لا کی اُن تمام حقیقی قیمتوں کے لئے جو ۵ر۰ اور - ۱ر۵ کے درمیان واقع ہوں لیکن لا کی باقی سب قیمتوں کے لئے یہ منفی ہے، مزید برایں ۳ - ۴ لا - ۴ لا^{۲} کی کم سے کم قیمت معلوم کرو۔

۳ - ۴ لا - ۴ لا^{۲}

لا = ۰	۵ر	۱	۱ر۵	۲	۵ر -	۱ -	۱ر۵ -	۲ -	۲ر۵ -
۳ - ۴ لا = ۳	۱	۱ -	۳ -	۵ -	۵	۷	۹	۱۱	۱۳
- ۴ لا^{۲} = ۰	۱ -	۴ -	۹ -	۱۶ -	۱ -	۴ -	۹ -	۱۶ -	۲۵ -
ا = ۳	۰	۵ -	۱۲ -	۲۱ -	۴	۳	۰	۵ -	۱۲ -



لا کی قیمتوں کو محور لا پر ناپو، پیمانہ ۱" = ۲

اور ما کی قیمتوں کو محور ما پر ناپو، پیمانہ ۱" = ۱۰؛

جدول بالا کے نقاط کو مرتسم کرنے سے اوپر کی ترسیم حاصل ہوتی ہے
مساوات ۴ لا^{۲} + ۴ لا - ۳ = ۰ کی اصلیں لا کی وہ قیمتیں ہیں
جن کے لئے ما یعنی ۳ - ۴ لا - ۴ لا^{۲} صفر کے مساوی ہے، اور یہ
صرف نقاط م اور ن پر واقع ہوتا ہے جہاں ترسیم محور لا کو قطع کرتی
ہے پس مساوات کی مطلوبہ اصلیں ۰٫۵ اور - ۱٫۵ ہیں۔

اب نقاط م اور ن کے درمیان ترسیم کا جو حصہ ہے وہ محور لا
کے اوپر واقع ہے پس ما یعنی ۳ - ۴ لا - ۴ لا^{۲} مثبت رہتا ہے جبتک
کہ لا کی قیمت ۰٫۵ اور - ۱٫۵ کے درمیان واقع ہوتی ہے، نیز ظاہر
ہے کہ لا کی باقی سب قیمتوں کے لئے ۳ - ۴ لا - ۴ لا^{۲} منفی ہے۔

۳ - ۴ لا - ۴ لا^{۲} کی بڑی سے بڑی قیمت ترسیم کے سب سے بڑے معین
۴ کے مساوی ہے؛ جبریہ طریق پر اسے ہم اس طرح دیکھ سکتے ہیں۔

۳ - ۴ لا - ۴ لا^{۲} = ۳ + ۱ - (۱ + ۴ لا + ۴ لا^{۲}) = ۴ - (۱ + ۲ لا)^{۲}

اب لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے (۱ + ۲ لا)^{۲} مثبت ہے سوائے
اس صورت کے جبکہ لا = - $\frac{۱}{۲}$ اور جب لا = - $\frac{۱}{۲}$ تو (۱ + ۲ لا)^{۲} = ۰
اور اس صورت میں جملہ کی قیمت ۴ کے مساوی ہے جو اس کی قیمت
اعظم ہے۔

مندرجہ بالا تین مثالوں میں ہم نے تفاعل لا^{۲} - ۷ لا + ۱۱
یا مساوات ما = لا^{۲} - ۷ لا + ۱۱ } (۱)

تفاعل ۵ لا^{۲} + ۴ لا − ۲۵ اور تفاعل ۳ − ۴ لا − ۴ لا^{۲}

مساوات ما = ۵ لا^{۲} + ۴ لا − ۲۵ (۲) یا مساوات ما = ۳ − ۴ لا − ۴ لا^{۲} (۳)

کی ترسیمیں بنائیں، اور طالب علم غور سے دیکھے کہ تینوں صورتوں میں ترسیموں کی عام شکل اور بناوٹ ایک ہی ہے، اور یہ بالعموم درست ہے کہ

تفاعل ا لا^{۲} + ب لا + ج

یا مساوات ما = ا لا^{۲} + ب لا + ج

کی ترسیم بھی اسی شکل کی ہوگی، اس منحنی کو قطع مکافی یا صرف مکافی کہتے ہیں دفعہ ذیل میں ہم اس کے خواص پر مختصراً بحث کرینگے۔

ضروری ۔ اس دفعہ میں ہم نے ایک مجہول مقدار کی مساوات درجہ دوم کو ترسیمی طریق پر حل کیا، اس بات کا ذکر کر دینا ضروری معلوم ہوتا ہے کہ یہ طریقہ بالکل عام ہے اور کسی درجہ کی مساوات کے حل کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے، ہم یہاں صرف درجہ سوم کی ایک مساوات کو ترسیمی طریق پر حل کرنے سے اس طریقہ کی مزید توضیح کرینگے۔

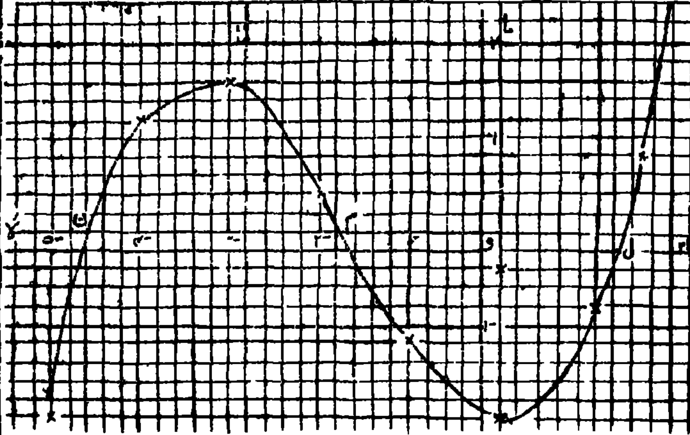
مثال ۔ مساوات $\frac{۱}{۵}$ لا^{۳} + لا^{۲} − ۲ = ۰ کی اصلیں ترسیمی طریق پر معلوم کرو۔

سہولت کی خاطر جدول ذیل مرتب کی گئی ہے

لا	−۵	−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۱٫۵	۲
لا^{۲}	۲۵	۱۶	۹	۴	۱	۰	۱	۲٫۲۵	۴
$\frac{۱}{۵}$ لا^{۳}	−۲۵	−۱۲٫۸	−۵٫۴	−۱٫۶	−٫۲	۰	٫۲	٫۶۷	۱٫۶
$\frac{۱}{۵}$ لا^{۳} + لا^{۲} − ۲	−۲	۱٫۴	۱٫۶	٫۴	−۱٫۲	−۲	−٫۸	٫۹	۳٫۶

نقاط (−۵، −۲)، (−۴، ۱٫۲) وغیرہ وغیرہ کو مرتسم کرنے اور انکو ملانے سے

ذیل کی ترسیم حاصل ہوتی ہے،



چونکہ ترسیم محور لا کو صرف تین نقاط ل، م، ن پر قطع کرتی ہے۔ اسلئے ان نقطوں کے لئے تفاعل $\frac{۱}{۵}$ لا^{۳} + لا^{۲} − ۲ صفر کے مساوی ہے۔

پس اُن نقاط کے فصلے ول، وم، ون، مساوات کے مطلوبہ حل ہیں۔ ول = ۱٫۲۵، وم = −۱٫۸، ون = −۴٫۶

پس ایک مجہول مساوات درجہ سوم $\frac{۱}{۵}$ لا^{۳} + لا^{۲} − ۲ کی تین اصلیں ترسیمی طریق سے ۱٫۲۵، −۱٫۸، −۴٫۶ معلوم ہوئیں۔

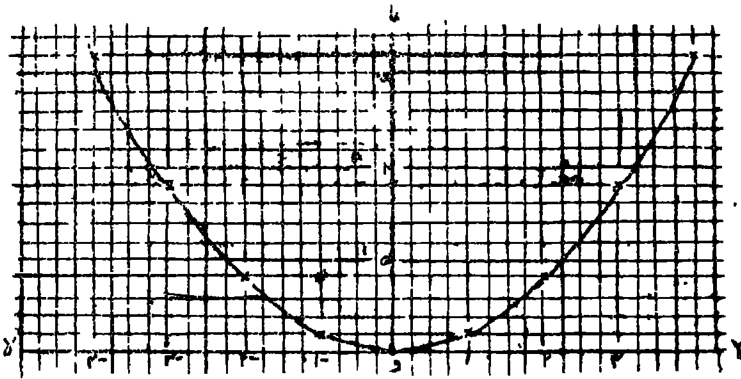
اوپر کے عمل سے ظاہر ہے کہ یہ طریقہ ایک مجہول کی کسی درجہ کی مساوات کے تقریبی حل معلوم کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے۔

۴۴۔ مثال ۱۔ ما = لا^{۲} کی ترسیم

یہ ترسیم نہایت ضروری اور دلچسپ ہے، اس لئے مناسب ہے کہ اسے موزون پیمانہ پر نہایت احتیاط کے ساتھ مرتسم کیا جائے۔

طالب علم جانتا ہے کہ مساوات ما = لا۲ کی ترسیم وہی ہے جو تفاعل لا۲ کی ہے۔ لا کو مختلف عددی قیمتیں دینے سے لا۲ یعنی ما کی متناظر قیمتیں معلوم کرو اور ان سے جدول ذیل مرتب کرو۔

لا	۵	۴	۳	۲	۱	۰	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	....
ما	۲۵	۱۶	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	...



جدول بالا سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا کی کسی دو مساوی مگر مختلف العلامت قیمتوں (مثلاً +۵ اور -۵) کے جواب میں ما کی ایک ہی قیمت (۲۵) ہے۔

محور لا پر طول ناپنے کی اکائی فرض کرو اُ = ۲۵ء۲ یعنی چار چھوٹے حصے = ۱ اور محور ما پر اُ = ۱۰

نقاط (۴، ۱۶) (۳، ۹) وغیرہ وغیرہ کو مرتسم کرنے اور ملانے سے ما = لا۲ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے ملاحظہ ہو شکل بالا، یہ منحنی **قطع مکافی** کہلاتا ہے۔ اس کے متعلق دو تین باتیں خاص طور پر غور طلب ہیں۔

(۱) طالب علم دیکھے کہ منحنی بالتمام ربعات اول اور دوم میں واقع ہے، کیونکہ ما = لا^2 میں لا کو ہم خواہ کوئی مثبت یا منفی قیمت دیں لا^2 یعنی ما کبھی منفی نہیں ہوگا اور اسلئے منحنی کا کوئی نقطہ محور لا سے نیچے واقع نہیں ہوگا لیکن اگر مساوات ما = - لا^2 ہوتی تو لا کی تمام قیمتوں کے لئے ما منفی ہوتا یعنی منحنی بالتمام محور لا سے نیچے واقع ہوتا۔

ظاہر ہے کہ مساواتوں ما = لا^2، ما = - لا^2 } کے منحنی بالکل ایک جیسے ہیں صرف فرق یہ ہے کہ پہلا منحنی محور لا کے اوپر واقع ہے اور اس کا قعر اوپر کیطرف ہے (دیکھو شکل بالا) اور دوسرا بالتمام محور لا سے نیچے واقع ہے اور اس کا انحنار نیچے کی طرف ہے۔

اسی شکل میں اسی پیمانہ پر طالب علم خود ما = - لا^2 کی ترسیم بنا کر ان امور کی تصدیق کرے اور دیکھے کہ محور لا دونوں صورتوں میں ہر دو منحنیات کا کا مماس ہے۔

(۲) مساوات ما = لا^2 اس طرح لکھی جا سکتی ہے لا = ± $\sqrt{ما}$

اس سے ظاہر ہے کہ ما کی کسی خاص قیمت کے لئے لا کی دو قیمتیں ہیں جو مقدار میں مساوی لیکن علامت میں مختلف ہیں، اس لئے ترسیم بلحاظ محور لا کے متشاکل ہے پس اگر ربع اول میں ہم چند نقطے مرتسم کر کے منحنی کی شکل معلوم کر سکیں تو ربع دوم میں بغیر اور نقطے فی الحقیقت مرتسم کرنے کے منحنی کی شکل معلوم ہو سکتی ہے۔ کیونکہ محور ما میں ایک طرف کا حصّہ دوسری طرف کے حصہ کا عکس ہے۔

(۳) اگر لا کو تعداداً بڑھایا جائے تو لا^2 یعنی ما بھی بڑی سرعت سے

بڑھتا ہے اور چونکہ ہم لا کو بڑی سے بڑی مثبت یا منفی قیمت دے سکتے ہیں اس سے معلوم ہوا کہ منحنی مذکور ربعات اول اور دوم میں لا انتہا فاصلہ تک باہر کی طرف اوپر کو پھیلتا جاتا ہے۔

مثال ۲ ۔ ما = ا لا^{۲} کی ترسیم

اس مساوات ما = ا لا^{۲} میں ا کو کوئی عددی قیمتیں ۲، ۳، ۱۰ وغیرہ دینے سے کئی مساواتیں حاصل ہوسکتی ہیں ما = ۲ لا^{۲}، ما = - ۳ لا^{۲}، ما = ۱۰ لا^{۲} وغیرہ وغیرہ، ایسی ہر ایک مساوات کی ترسیم ہم بعینہٖ مثال ۱ کے عمل کے موافق بنا سکتے ہیں یعنی پہلے ہم لا کی کوئی مناسب قیمتیں منتخب کریں اور اس کے بعد ان قیمتوں کے جواب میں ما کی قیمتیں معلوم کریں، لا، ما کی ان متناظر قیمتوں کو مرتسم کرنے سے ترسیم حاصل ہوسکتی ہے۔ لیکن ان مساواتوں کی ترسیمیں ہم ایک اور مفید اور مختصر طریقہ سے بناتے ہیں۔

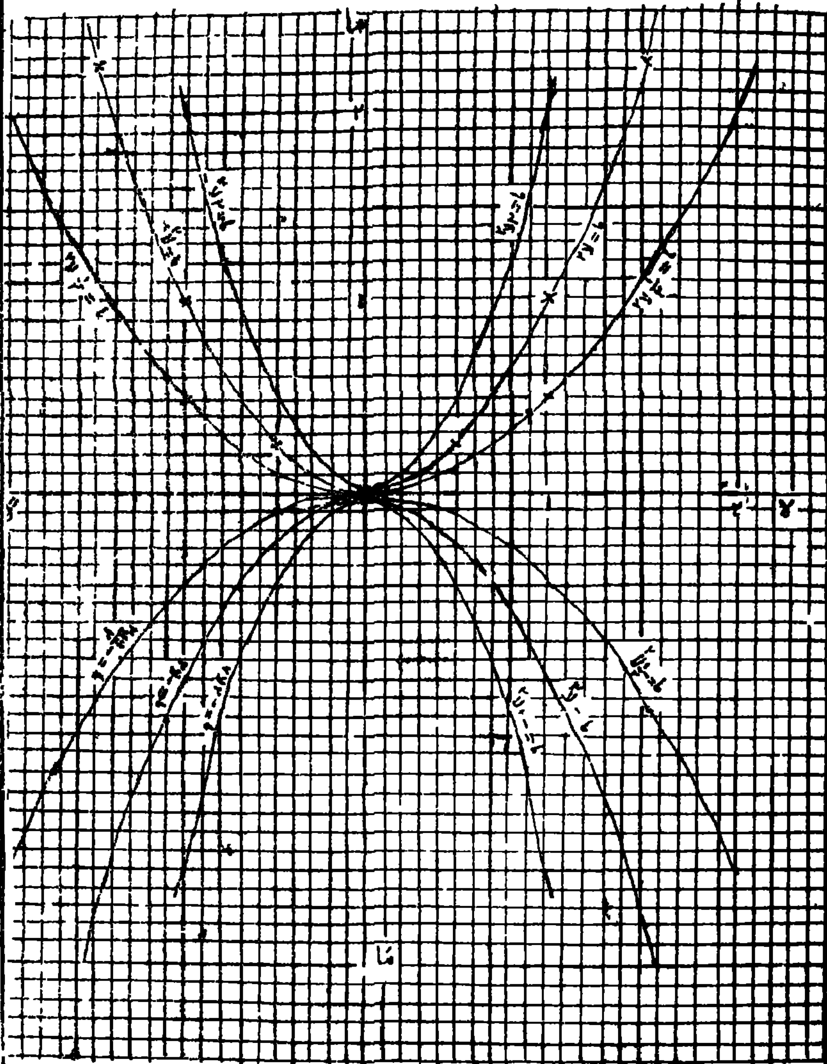
(۱) فرض کرو کہ ا مثبت ہے اور ۲ کے مساوی ہے، اس صورت میں مساوات مفروضہ ما = ۲ لا^{۲} ہوگی۔

سب سے پہلے طالب علم ما = لا^{۲} کی ترسیم بنائے (دیکھو مثال ۱)

لا کی ایک ہی قیمت کے لیئے ۲ لا^{۲} کی ترسیم کا معین لا^{۲} کی ترسیم کے معین سے دو چند ہے، پس اگر ما = لا^{۲} کے ہر ایک معین کو اوپر کی طرف اتنا خارج کیا جائے کہ نئے معین کا طول پہلے سے دو چند ہو جائے اور ان نئے معینوں کے سروں کو ایک مسلسل منحنی سے ملایا جائے تو یہ منحنی مساوات ما = ۲ لا^{۲} یا تفاعل ۲ لا^{۲} کی ترسیم ہوگا۔

اس طرح سے ہم تفاعیل ۳ لا^{۲}، $\frac{۱}{۲}$ لا^{۲} کی ترسیمیں لا^{۲} کی ترسیم

کے ہر معین کو بالترتیب دگنا یا آدھا کرنے سے حاصل کر سکتے ہیں۔



شکل بالا میں محور لا کے اوپر جو منحنی ہیں وہ تفاعیل لا^۲، ۲ لا^۲، $\frac{1}{2}$ لا^۲ کی ترسیمیں ہیں ان میں سے ہر ایک قطع مکافی ہے، پس اگر مساوات ما = ا لا^۲ یا تفاعل ا لا^۲ میں ا کا سر مثبت ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مکافی بالتمام محور لا کے اوپر واقع ہوتا ہے اور جیسے یہ سر تعداد اً بڑھتا ہے

بہ مکافی محور ما کے گرد تنگ ہوتا جاتا ہے مثلاً ۲ لا۲ کی ترسیم لا۲ کی ترسیم کے بالکل اندر واقع ہوتی ہے اور لا۲ کی ترسیم ½ لا۲ کی ترسیم کے اندر ہے
(۲) فرض کرو کہ ا منفی ہے، پس اگر ا = - ۱ تو مساوات مفروضہ ہوگی ما = - لا۲، اس مساوات کا ما = لا۲ کے ساتھ مقابلہ کرو۔ ہم دیکھتے ہیں

کہ لا کی کسی قیمت کے لئے ما کی جو قیمتیں مساواتوں
$$\left.\begin{array}{l}ما = - لا^2 \\ ما = لا^2\end{array}\right\}$$
سے

حاصل ہوتی ہیں وہ مقدار میں مساوی ہیں لیکن علامت میں مختلف ہیں، اسلئے ما = - لا۲ کی ترسیم کے معین ما = لا۲ کے معینوں کے مساوی ہونگے لیکن محور لا سے نیچے کی طرف کھینچے جائینگے، پس ما = - لا۲ کی ترسیم محور لا میں ما = لا۲ کی ترسیم کا عکس ہے اور یہ اس طرح حاصل ہوسکتی ہے، ما = لا۲ کی ترسیم پر کوئی نقطہ لو اور محور لا کی دوسری جانب اتنے ہی عمودی فاصلہ پر ایک نقطہ معلوم کرو یعنی محور لا میں نقطہ کا عکس معلوم کرو۔ ایسے کئی نقطے معلوم ہوسکتے ہیں جنکو ملانے سے ما = - لا۲ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔

ما = - ۲ لا۲ (ا = - ۲) کی ترسیم ما = - لا۲ کی ترسیم کے معینوں کو دگنا کرنے سے معلوم ہوسکتی ہے یا اسے ہم ۲ لا۲ کی ترسیم کا محور لا میں عکس لینے سے حاصل کرسکتے ہیں۔ اسی طرح - ½ لا۲، - ۳ لا۲ کی ترسیمیں بنائی جاسکتی ہیں۔

شکل بالا میں محور لا کے نیچے جو منحنی ہیں وہ - لا۲، - ۲ لا۲، - ½ لا۲ کی ترسیمیں ہیں، ان میں سے ہر ایک قطع مکافی ہے اور چونکہ لا۲ کا سر ہر صورت میں منفی ہے اس لئے ہر ایک منحنی بالتمام محور لا سے نیچے

واقع ہوتا ہے۔

بالعموم ترسیموں کو نقطے مرتسم کرکے بنایا جاتا ہے لیکن طریق بالا سے یہ زیادہ واضح طور پر معلوم ہوتا ہے کہ ا کی مختلف مثبت قیمتوں کے لئے ا لا^2 کی ترسیمیں عام شکل اور ترکیب میں ما = لا^2 کی ترسیم کی طرح ہیں اور ا کی منفی قیمتوں کے لئے یہ ما = - لا^2 کی ترسیم کی مانند ہیں۔

ا لا^2 + ب کی ترسیم جہاں ب مثبت ہے ا لا^2 کی ترسیم سے حاصل ہوسکتی ہے اگر موخرالذکر کے ہر ایک معین کو بقدر ب اکائیوں کے اوپر کی طرف خارج کردیا جائے، پس ا لا^2 + ب اور ا لا^2 کی ترسیمیں بالکل متماثل ہیں صرف ا لا^2 + ب کی ترسیم بلحاظ مقام کے ب اکائیاں بمقابلۃ اوپر واقع ہے۔ اسی طرح ا لا^2 - ب کی ترسیم وہی ہے جو ا لا^2 کی صرف اول الذکر ب اکائیاں نیچے واقع ہے۔

مختصراً ا لا^2 کی ترسیم ا کی مختلف عددی قیمتوں کے لئے قطع مکافی ہے اگر ا مثبت ہو تو یہ ترسیم بالتمام محور لا سے اوپر واقع ہوتی ہے اگر ا منفی ہو تو یہ ترسیم محور لا سے نیچے واقع ہوتی ہے، جیسے ا تعداداً بڑھتا ہے یہ ترسیم محور ما کے گرد زیادہ تنگ ہوتی جاتی ہے اور جیسے ا گھٹتا ہے یہ ترسیم کشادہ ہوتی جاتی ہے۔

۴۵۔ درجہ دوم کی سب مساواتیں دفعات ۴۳، ۴۴ کے عام ترسیمی طریق سے حل ہوسکتی ہیں لیکن اگر ایسی مساواتوں کو اس طریقہ سے حل کیا جائے جو ہمزاد مساواتوں کے لئے استعمال کیا جاتا ہے تو عمل میں ذرا سہولت ہوتی ہے۔

مساوات درجہ دوم ا لا^2 + ب لا + ج = ۰ .... (۱)

پر غور کرو۔

فرض کرو کہ ما = لا^۲ .... (۲)

مساوات (۱) میں لا^۲ کے لئے ما مندرج کرنے سے

ا ما + ب لا + ج = ۰ .... (۳)

پس اگر مساواتوں
ما = لا^۲ (۲)
ا ما + ب لا + ج = ۰ (۳)
کو ایک ساتھ بطور متجانس مساواتوں کے ترسیمی طریق پر حل کیا جائے اور اس طرح لا کی قیمت یا قیمتیں معلوم کی جائیں تو یہ قیمتیں مساوات (۱) کی اصلیں ہونگی۔

اب نظام
ما = لا^۲
ا ما + ب لا + ج = ۰
کو ترسیمی طریق پر حل کرنے سے یہ مراد ہے کہ ہم ما = لا^۲ اور ا ما + ب لا + ج = ۰ کی الگ الگ ترسیمیں بنائیں اور جہاں یہ ایک دوسرے کو قطع کرتی ہوں ان نقاط کے فصلے یعنی لا کی قیمتیں معلوم کریں، یہ فصلے مساوات مفروضہ ا لا^۲ + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں ہونگی۔

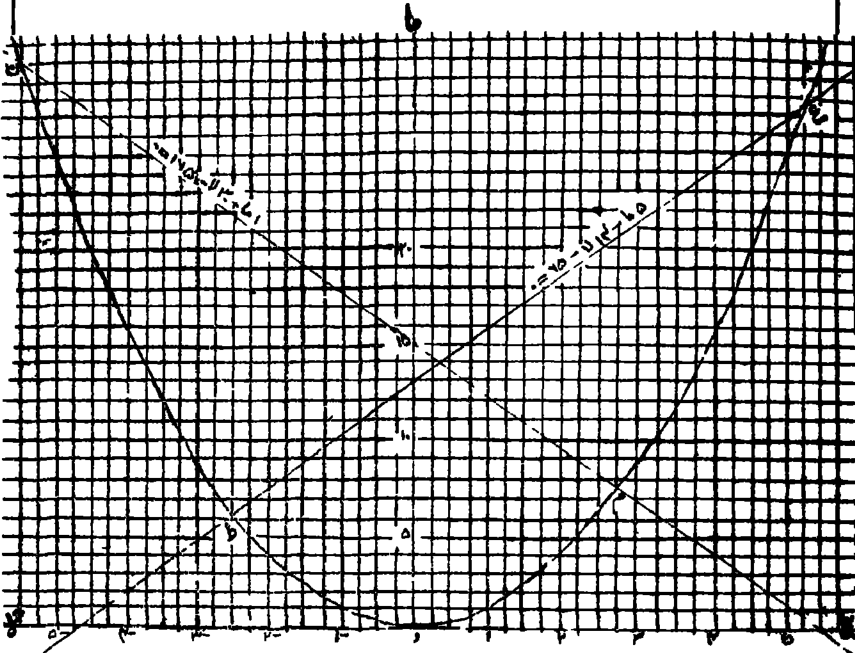
اس طریقہ کا خاص فائدہ یہ ہے کہ ہر مساوات درجہ دوم کے حل کرنے میں ما = لا^۲ کی وہی ترسیم ہمیشہ استعمال ہوسکتی ہے صرف ہر صورت میں ہمیں خطی مساوات ا ما + ب لا + ج = ۰ کی ترسیم بنانا پڑتی ہے جو ہم جانتے ہیں کہ مقابلتہً بآسانی بن سکتی ہے۔

ذیل کی مثالوں سے اس طریقہ کی بخوبی توضیح ہو گی۔

مثال ۱۔ مساوات ۱۱ لا^۲ + ۳۰ لا − ۱۶۵ = ۰ کو حل کرو۔

فرض کرو کہ ما = $لا^۲$ .... (۲)

مفروضہ مساوات میں یہ مندرج کرنے سے ۱۱ ما + ۳۰ لا - ۱۶۵ = ۰ ....(۳)



ما = $لا^۲$ کی ترسیم حسب سابق (دفعہ ۴۴) بناؤ، پیمانہ محور لا پر اَ = ۲،۵ اور محور ما پر اُ = ۱۰

اسی پیمانہ کے مطابق ۱۱ ما + ۳۰ لا - ۱۶۵ = ۰ کی ترسیم بناؤ، اس میں

اگر لا = ۰ تو ما = ۱۵

اور اگر ما = ۰ تو لا = ۵،۵

پس نقاط (۰، ۱۵) اور (۵،۵، ۰) کو ملانے والا مستقیم خط (۳) کی ترسیم ہے جو ما = $لا^۲$ کی ترسیم کو نقاط م اور ن پر قطع کرتی ہے، م اور ن کے فصلوں کو ناپنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا = ۲،۲ یا لا = -۵،۵

مساوات ۱۱ لا² + ۳۰ لا − ۱۶۵ کی اصلیں ہیں۔

مثال ۲۔ ۵ لا² − ۱۴ لا − ۶۵ = ۰ کو حل کرو

فرض کرو کہ ما = لا² .... (۱)

تب ۵ ما − ۱۴ لا − ۶۵ = ۰ .... (۲)

(۱) کی ترسیم شکل بالا میں موجود ہے

(۲) کی ترسیم پر دو نقطے (۰، ۱۳) اور (۵، ۲۷) واقع ہوتے ہیں، ان کو ایک خط مستقیم کے ذریعہ ملانے سے (۲) کی ترسیم حاصل ہوتی ہے جو مکافی کو ع اور ط پر قطع کرتی ہے، پس ع اور ط کے فصلے ناپنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے لا = ۵٫۳ یا − ۲٫۵ جو مساوات کی اصلیں ہیں

۶۴ دائرہ مثال ۱۔ مساوات لا² + ما² = ۳۶ کی ترسیم

یہ دو مقادیر مجہول لا، ما کی ایک مساوات درجہ دوم ہے، اس کو ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں ما = ± $\sqrt{۳۶ - لا^2}$

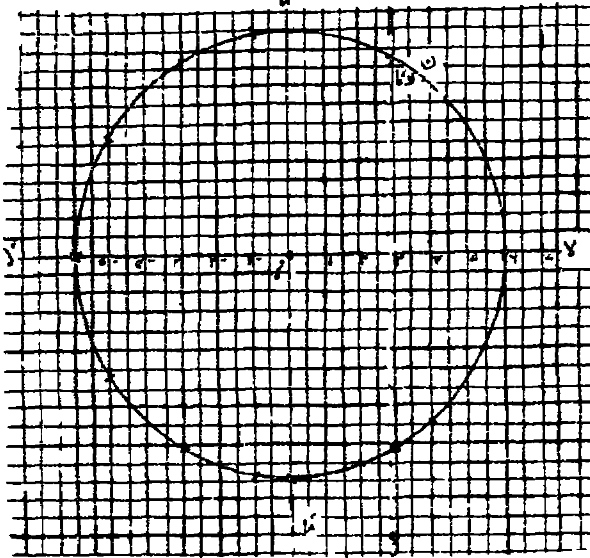
اس مساوات کی ترسیم وہی ہوگی جو تفاعل ± $\sqrt{۳۶ - لا^2}$ کی، لا، ما کی متناظر قیمتوں سے جدول ذیل مرتب کرو۔

لا	۷−	۶−	۵−	۳−	۱−	۰	۲	۴	۶	۷
لا²	۴۹	۳۶	۲۵	۹	۱	۰	۴	۱۶	۳۶	۴۹
۳۶ − لا²	۱۳−	۰	۱۱	۲۷	۳۵	۳۶	۳۲	۲۰	۰	۱۳−
$\sqrt{۳۶ - لا^2}$	± $\sqrt{-۱۳}$	۰	±۳٫۳	±۵٫۲	±۵٫۹	±۶	±۵٫۶	±۴٫۴۷	۰	± $\sqrt{-۱۳}$

ہم دیکھتے ہیں کہ لا کی ہر ایک قیمت کے لئے ما کی دو متناظر قیمتیں ہیں۔ جو تعداداً ایک دوسرے کے مساوی ہیں اور علامت میں مختلف ہیں مثلاً

اگر لا = -۵ تو ما = + ۳ء۳ یا - ۳ء۳

اور اگر لا = ۰ تو ما = + ۶ یا - ۶ وغیرہ وغیرہ



چونکہ لا کی کسی ایک قیمت کے لئے ما کی دو قیمتیں ہیں جو مساوی اور مختلف العلامت ہیں اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ترسیم محور لا کے گرد متشاکل ہے

اسی طرح مساوات کو اس شکل لا = $\sqrt{۳۶ - ما^۲}$ میں رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ترسیم محور ما کے گرد متشاکل ہے۔

نیز اگر لا = ± ۷ تو ما = ± $\sqrt{-۱۳}$ جو خیالی مقداریں ہیں، چونکہ ہم $\sqrt{-۱۳}$ کا تقریبی جذر بھی نہیں نکال سکتے اسلئے لا کی قیمت + ۷ یا -۷ کے جواب میں ہمیں ما کی حقیقی قیمتیں نہیں ملتی جکو مرتسم کرنے سے ہم منحنی پر ایک نقطہ معلوم کرسکیں، فی الحقیقت اگر لا تعداداً ± ۶ سے ذرا بھی بڑا ہو تو ما کی قیمتیں خیالی ہونگی، اسی طرح اگر ما تعداداً ± ۶ سے بڑا ہو تو لا کی قیمتیں خیالی ہونگی - پس معلوم ہوا کہ لا یا ما کی بڑی سے بڑی قیمت ۶ ہوسکتی ہے، اسلئے منحنی با تمام خطوط لا = + ۶، لا = - ۶

اور ما = + ۶ ، ما = - ۶ کے اندر واقع ہوتا ہے۔

اگر جدول کے سب نقاط کو حسب معمول مرتسم کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ یہ ایک ایسے دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں جس کا مرکز مبداء ہے اور جس کا نصف قطر ۶ ہے۔

دفعہ ۹ میں ہم نے دو نقاط کا باہمی فاصلہ ان نقاط کے محددوں کی رقوم میں معلوم کیا، مثلاً اگر دو نقاط ا اور ب کے محدد بالترتیب (لا۱ ، ما۱) اور (لا۲ ، ما۲) ہوں تو ا اور ب کے درمیانی فاصلہ کا مربع

یعنی $\text{اب}^2 = (\text{لا}_2 - \text{لا}_1)^2 + (\text{ما}_2 - \text{ما}_1)^2$

یعنی $\text{اب} = \sqrt{(\text{لا}_2 - \text{لا}_1)^2 + (\text{ما}_2 - \text{ما}_1)^2}$

اب فرض کرو کہ اس مثال کے دائرہ کے محیط پر کوئی عام نقطہ ن (لا ، ما) ہے، مبدا و کے محدد (۰ ، ۰) ہیں اسلئے

$\text{ون}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۳۶$ کیونکہ ن خواہ محیط پر کہیں واقع ہو اس کا فاصلہ مرکز و سے ہمیشہ ۶ ہوگا،

اسلئے دائرہ مذکور کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۳۶$ ہے۔

مثال ۲ — $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - ۸\,\text{لا} - ۶\,\text{ما} = ۰$ کی ترسیم بناؤ

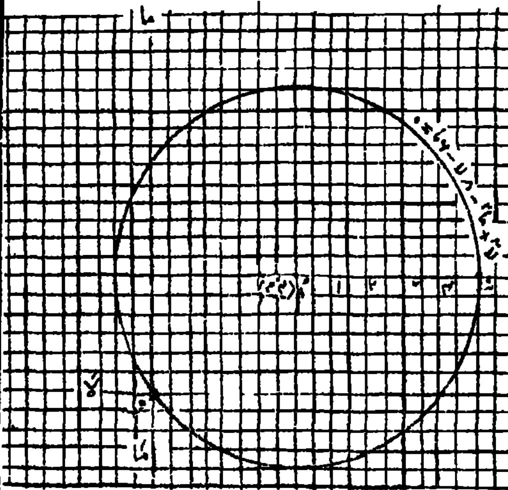
اس مساوات کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$(\text{لا}^2 - ۸\,\text{لا} + ۱۶) + (\text{ما}^2 - ۶\,\text{ما} + ۹) = ۲۵$ (طرفین پر ۲۵ زیادہ کرنے سے)

یعنی $(\text{لا} - ۴)^2 + (\text{ما} - ۳)^2 = ۲۵$

لا	۰	۴	۵	۹	-۱	-$\frac{۱}{۲}$
لا-۴	-۴	۰	۱	۵	-۵	-۴$\frac{۱}{۲}$
(لا-۴)^{۲}	۱۶	۰	۱	۲۵	۲۵	۲۰$\frac{۱}{۴}$
(ما-۳)^{۲}	۹	۲۵	۲۴	۰	۰	۴$\frac{۳}{۴}$
ما-۳	±۳	±۵	±۴٫۸۹	۰	۰	±۲$\frac{۱}{۴}$
ما	۰ یا ۶	۸ یا -۲	۷٫۸۹ یا -۱٫۸۹	۳	۳	۵$\frac{۱}{۴}$ یا $\frac{۳}{۴}$

اوپر کے دس نقاط کو مرتسم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں جس کا مرکز (۴، ۳) ہے اور نصف قطر ۵، مبدأ و بھی اس دائرہ کے محیط پر واقع ہوتا ہے۔ یہ ہم ابتدا میں ہی مساوات سے دیکھ سکتے تھے کیونکہ



مبدء کے محدد (۰، ۰) مساوات مفروضہ کو پورا کرتے ہیں۔

۷۴- اب ہم درجہ دوم کی ہمزاد مساواتوں کو ترسیمی طریق پر حل کرنے کی ایک دو سادہ مثالیں درج کرتے ہیں، ترسیمی طریق پر سب ہمزاد مساواتیں قریب قریب ایک ہی طرح سے حل ہوتی ہیں۔

ان مساواتوں کی ہم الگ الگ ترسیمیں بناتے ہیں اور ان کے نقاط تقاطع کے محدد معلوم کرتے ہیں۔

مثال ا ۔ ذیل کی ہمزاد مساواتوں کو ترسیمی طریق پر حل کرو ۔

لا۲ + ما۲ = ۲۵ .... (۱)

لا - ما = ۱ .... (۲)

ان مساواتوں کو اس طرح لکھو

ما = √(۲۵ - لا۲) .... (۱)

ما = لا - ۱ .... (۲)

اب مطلوب یہ ہے کہ ہم لا، ما کی ایسی قیمتیں معلوم کریں جو (۱) اور (۲) دونوں کو پورا کریں ۔ پس ہمیں ما = √(۲۵ - لا۲) اور ما = لا - ۱ کی ترسیمیں بنا کر ان کے نقاط تقاطع معلوم کرنے چاہئیں ۔

ما = √(۲۵ - لا۲) کی ترسیم

لا	۵	۴	۳	۰	۳-	۴-	
ما	۰	۳±	۴±	۵±	۴±	۳±	

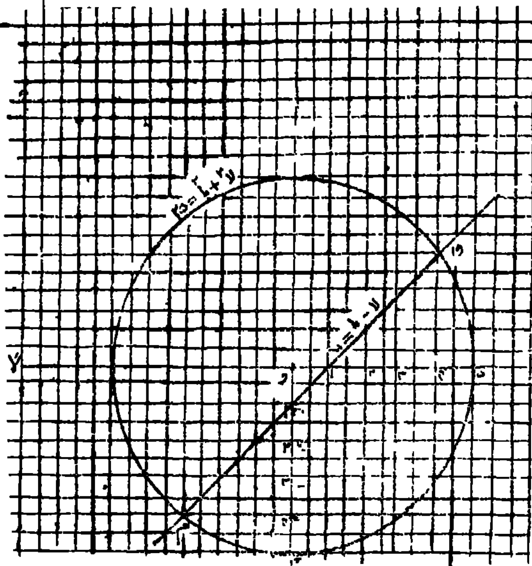
ان نقاط کو مرتسم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ما = √(۲۵ - لا۲) کی ترسیم ایک محیط دائرہ ہے جس کا مرکز مبداء ہے اور نصف قطر ۵ ۔

اب اس شکل میں اسی پیمانہ پر ہم ما = لا - ۱ کی ترسیم بناتے ہیں

ما = لا - ۱ کی ترسیم

لا	۳	۲	۱	۰	۱-	۲-	۳-
ما	۲	۱	۰	۱-	۲-	۳-	۴-

ان نقاط کو مرتسم کرنے سے ما = لا - ۱ کی ترسیم بنائی گئی ہے جو ایک مستقیم



خطوط - دائرہ اور یہ خط مستقیم ایک دوسرے کو نقاط ھ اور ن پر قطع کرتے ہیں جن کے محدد بالترتیب (۴، ۳) اور (-۳، -۴) ہیں اور چونکہ یہ نقطے دونو ترسیموں پر ہیں اسلیئے یہ دونوں مساواتوں کو پورا کرتے ہیں۔

تصدیق - لا = ۴، ما = ۳ } کو مساواتوں میں مندرج کرنے سے

(۱) لا۲ + ما۲ = ۴۲ + ۳۲ = ۲۵

لا - ما = ۴ - ۳ = ۱

(۲) اگر لا = -۳، ما = -۴ } تو لا۲ + ما۲ = (-۳)۲ + (-۴)۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵

لا - ما = -۳ - (-۴) = ۱ وغیرہ وغیرہ

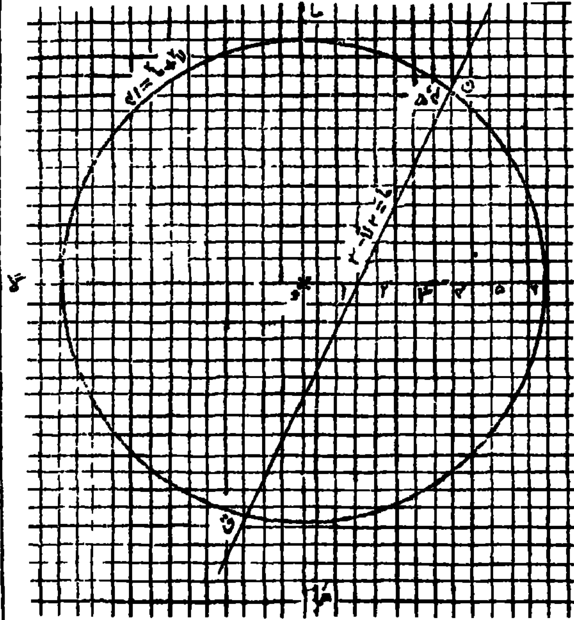
پس یہ حل درست ہیں۔

مثال ۲ - ذیل کی ہمزاد مساواتوں کو ترسیمی طریق پر حل کرو۔

لا۲ + ما۲ = ۴۱ ....(۱) اور ما = ۲لا - ۳ ....(۲)

(۱) کی ترسیم ایک دائرہ کا محیط ہے جس کا مرکز مبدأ ہے اور نصف قطر √۴۱ = ۶٫۴۰۳ ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ لا = ۴ اور ما = ۵ نقطہ ن مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے، اسلیئے یہ دائرہ مذکور کے محیط پر واقع ہے،

پس اگر ہم مبداء کو مرکز اور و ن کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچیں تو اس کا محیط ترسیم مطلوبہ ہوگی۔



(۲) کی ترسیم ایک مستقیم خط ہے جو محاور کو نقاط (۵ءا، ۰) اور (۰، -۳) پر قطع کرتی ہے، یہ خط دائرہ کو نقاط ن اور ق پر قطع کرتا ہے اور ان نقطوں کے محدد بالترتیب (۴، ۵) اور (-۶ءا، -۶ء۲) ہیں، پس ہمزاد مساواتوں (۱) اور (۲) کے حل حسب ذیل ہیں۔

لا = ۴، ما = ۵ اور لا = -۶ءا، ما = -۶ء۲

امثلہ نمبری ۱۱

۱ - ہر صورت میں مناسب پیمانہ کا انتخاب کر کے ۸ لا^۲، ۱۲ لا^۲، -۵ لا^۲، -$\frac{۳}{۲}$ لا^۲ کی ترسیمیں بناؤ اور دکھاؤ کہ سب ترسیمیں مبدأ پر محور لا کو مس کرتی ہیں۔

۲ - ما = لا^۲ اور لا = ما^۲ کی ترسیمیں بناؤ اور دکھاؤ کہ ان کا صرف

ایک مشترک وتر ہے، اس کی مساوات معلوم کرو۔

۳۔ (۱) ما^{2} = -۴ لا (۲) ما = ۲ لا + $\frac{\text{لا}^{2}}{۴}$ (۳) ما = ۲لا - $\frac{\text{لا}^{2}}{۴}$

(۴) ما = $\frac{\text{لا}^{2}}{۴}$ + لا - ۲ کی ترسیمیں بناؤ

ذیل کی مساواتوں کو ترسیمی طریق پر حل کرو

۴۔ لا^{2} + لا - ۲ = ۰ ۵۔ لا^{2} + ۳ لا - ۱۰ = ۰

۶۔ ۴ لا^{2} - ۲۵ لا + ۲۰ = ۰ ۷۔ لا^{2} + لا - ۵ = ۰

۸۔ ۲ لا^{2} + ۵ لا - ۲۰ = ۰ ۹۔ ۹ لا^{2} - ۱۲ لا - ۲۶ = ۰

۱۰۔ ۳ لا^{2} - ۲ لا - ۶۵ = ۰ ۱۱۔ ۲ لا^{2} + ۵ لا - ۱۲ = ۰

۱۲۔ ۳ لا^{2} + ۵ لا - ۱۵ = ۰ ۱۳۔ لا^{3} - ۵ لا - ۲ = ۰

۱۴۔ ذیل کے جملات کی ترسیمیں بناؤ اور ہر صورت میں جملہ کی کم سے کم قیمت معلوم کرو

(۱) ۴ لا^{2} - ۹ لا + ۵

(۲) ۳ لا^{2} - ۵ لا + ۴

(۳) ۲ لا^{2} - ۱۳ لا + ۲۲

۱۵۔ ذیل کے جملات کی ترسیمیں بناؤ اور ہر صورت میں جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

(۱) ۶ لا - لا^{2} - ۱

(۲) ۵ + ۸ لا - ۸ لا^{2}

(۳) ۵ + ۴ لا - ۴ لا^{2}

۱۶۔ ترسیمی طریق پر ثابت کرو کہ تفاعل لا^{2} - ۲ لا - ۸، لا کی اُن تمام قیمتوں کے لئے منفی ہے جو -۲ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی

ہیں لیکن ان حدود کے باہر لا کی تمام قیمتوں کے لئے یہ مثبت ہے،

۱۷ـــ ذیل کی مساواتوں کو ترسیمی طریق پر حل کرو

(۱)
$$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = ۱۰۰$$
$$\text{لا} + \text{ما} = ۱۴$$

(۲)
$$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = ۳۶$$
$$۴\,\text{لا} + ۳\,\text{ما} = ۱۲$$

(۳)
$$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = ۳۴$$
$$۲\,\text{لا} + \text{ما} = ۱۱$$

جوابات

سوالات کے ترسیمی حل میں خواہ کتنی ہی احتیاط اور صحت سے کام لیا جائے نتائج محض تقریبی حاصل ہوں گے، جوابات ذیل نظری طریق پر حساب لگانے سے حاصل کئے گئے ہیں اور ان کی بناء پر طالب علم اپنے نتائج، اشکال اور پیمائش کی جانچ کرسکتا ہے۔

امثلہ نمبری ۱ صفحہ ۷

۱۔ اکائی سنتی میٹر، ع ج = ۲، ر ع = - ۲٫۵
د ع = ۱٫۲، ر ر = ۱٫۵، د ب = - ۱٫۹، د ج = ۳٫۲
۲۔ اکائی سنتی میٹر، ل ل = - ۰٫۶، ل م = ۲٫۵، ص ج = - ۴
ا س = ۲٫۴۵، د ج = ۱٫۷۵، ر ل = ۱٫۵
۳۔ - ۵٫۱ + ۷٫۱۱ - ۵٫۲ + ۳٫۷
تمام مسافت کے بعد وہ اپنی سمت روانگی میں ۳٫۴ میل چلا۔

امثلہ نمبری ۲ صفحہ ۱۴

۱۔ (ر) اگ = ۱، ن۱ (۵، ۷)، ن۲ (۸، ۰)، ن۳ (۰، ۹)

ن۴ (-۵، ۴)، ن۵ (-۹، ۰)، ن۶ (-۱۱، -۱۱)، ن۷ (۰، -۷)،
ن۸ (۲، -۴)، ن۹ (۱۱، -۱۰)

(ب) اً = ۱، ن۱ (۵ء۱، ۷ء۱)، ن۲ (۸ء۰، ۰)، ن۳ (۰، ۹ء۱)،
ن۴ (-۵ء۰، ۴ء۱)، ن۵ (-۹ء۰، ۰)، ن۶ (-۱ء۱، -۱ء۱)، ن۷ (۰، -۷ء۱)،
ن۸ (۲ء۰، -۴ء۱)، ن۹ (۱ء۱، -۱)،

(ج) ۵ء۰ اً = ۱، ن۱ (۱، ۴ء۱)، ن۲ (۶ء۱، ۰)، ن۳ (۰، ۸ء۱)،
ن۴ (-۱، ۸ء۱)، ن۵ (-۸ء۱، ۰)، ن۶ (-۲ء۲، -۲ء۲)، ن۷ (۰، -۴ء۱)،
ن۸ (۴ء۰، -۸ء۱)، ن۹ (۲ء۲، -۲)

۲- (۵، ۷) (-۹، ۰)، (۸، ۰) (۰، -۷)، (۰، ۹) (۱۱، -۱۰)
(۲، -۴) (۰، -۷)، (-۵، ۴) (۸، ۰)

۳- (۵ء۱، ۷ء۱) (-۵ء۰، ۴ء۱) (۸ء۰، ۰)، (۰، ۹ء۱) (-۱ء۱، -۱ء۱)، (۰، -۷ء۱)
(۸ء۰، ۰) (۲ء۰، -۴ء۱) (۱ء۱، -۱۰)، (-۹ء۰، ۰) (۰، -۷ء۱) (-۱ء۱، -۱ء۱)

۷- (ا) یہ خط محور لا سے نقطہ (۲ء۱، ۰) پر اور محور ما سے (۰، ۴ء۱) پر ملتا ہے، ظاہر ہے کہ یہ خط قریب قریب مبدأ میں سے گذرتا ہے۔

(ب) یہ خط محور لا سے نقطہ (-۵ء۱، ۰) پر اور محور ما سے (۰، -۴ء۱) پر ملتا ہے۔

(ج) محور لا سے نقطہ (-۷ء۵، ۰) پر اور محور ما سے (۰، ۸ء۱) پر

۸- (ا) اضلاع کے طول ا ر ۳ انچ، ۹ء انچ، رقبہ ۹ء۷۱۲ مربع انچ

(۲) اضلاع کے طول ۲،۱۲ انچ، ۲،۰۱ انچ، رقبہ ۲،۲۶۴ مربع انچ

۹۔ (۱) ۲ مربع انچ (۲) ۱،۸۸۵ مربع انچ (۳) ۳،۱۲ مربع انچ

۱۰۔ (۱) ۲،۵۳ (۲) ۱،۸۸ (۳) ۴،۹۶ (۴) ۵،۹۷

۱۱۔ (۱) ۲″، ۳″، ۶ مربع انچ (۲) ۳″، ۲،۴″، ۲،۴″، ۹،۶۶ مربع انچ

(۳) ۲،۴″، ۲″، ۴،۸ مربع انچ (۴) ۶″، ۴″، ۲۴ مربع انچ

(۵) ۲۴،۱″، ۲،۶۲″، ۳،۲۵ مربع انچ (۶) ۴″، ۲،۷۲″، ۳″، ۱۴،۸۸ مربع انچ

۱۲۔ (۱) (۹،۲۶)، ۹،۵ (۲) (-۲،۰، ۴،۸)، ۱۱،۷

(۳) (۹،۶، ۱۰)، ۳۰،۸ (۴) (۱،۳۱، ۱۰)، ۱۲،۹۲

امثلہ نمبری ۳ صفحہ ۳۸

۱۔ ہر جوڑے کا باہمی فاصلہ ۵ ہے۔

۲۔ (۱) ۹،۹۹ (۲) ۳،۴۹ (۳) ۵،۳۹ (۴) ۷،۷

۴۔ مرکز مبدا (۰،۰)، نصف قطر ۱۳

۵۔ مساوی فاصلہ ۲۵

۶۔ جہازوں کا باہمی فاصلہ ۱۳ میل، پہلے جہاز کا فاصلہ روشنی گھر سے ۱۰ میل

۷۔ (۱) لا^2 + ما^2 − ۶ لا − ۸ ما = ۰

(۲) لا^2 + ما^2 + ۱۰ لا + ۶ ما − ۱۵ = ۰

(۳) لا^2 + ما^2 = ر^2

(۴) (لا − ل)^2 + (ما − ب)^2 = ر^2

یا لا^2 + ما^2 − ۲ ل لا − ۲ ب ما + ل^2 + ب^2 − ر^2 = ۰

امثلہ نمبری ۴ صفحہ ۸۷

۵- ۱۶۰ مربع اکائیاں   ۷- ۳ لا - ۲ ما = ۰

۸- ما کی متناظر قیمتیں ۰، ۱ر۵، ۳ر۵، ۷ر۵، -۳، -۶

۹- " ۰، ۱ر۳، ۴، ۶ر۶، -۲ر۶، -۳ر۵

۱۰- " ۰، -ر۷۵، -۲ر۲۵، -۳ر۷۵، ۱ر۵، ۳

۱۱- " ۰، -۱ر۵، -۴ر۵، -۷ر۵، ۳، ۶

۱۲- " ۰، -۲ر۵، -۷ر۵، -۱۲ر۵، ۵، ۱۰

۱۳- " ۰، -ر۴، -۱ر۱۲، -۲، ر۸، ۱ر۶

۱۴- " ۰، -ر۶، -۱ر۸، -۳، ۱ر۲، ۲ر۴

۲۹- (۰، ۳)   ۳۰- ۱۶ر۶ مربع اکائیاں

۳۱- ۲۱ر۳ مربع اکائیاں

امثلہ نمبری ۵ صفحہ ۹۴

۱- لا = ۰، ما = ۱ر۳   ۲- لا = ۲ر۳، ما = ۰   ۳- لا = ۲، ما = ۰

۴- لا = ۲ر۶، ما = -۳   ۵- لا = ۲ر۵، ما = -۲ر۵   ۶- لا = ۸، ما = ۶

۷- لا = ۲، ما = ۳   ۸- لا = -۲، ما = ۴   ۹- لا = -۳، ما = ۰

۱۰- لا = -۲، ما = ۴   ۱۱- لا = ۴، ما = -۱ر۵

۱۲- لا = ۱ر۴۷، ما = -۵ر۵۷   ۱۳- لا = -۲   ۱۴- لا = ۳، ما = -۲

۱۵- لا = -۴، ما = ۵   ۱۶- (۱) (-۲، ۱) (۲) (۲، ۳) (۳) (۱، -۲)

۱۷- (-۲، ۱) (۲، ۳)، (۱، -۲)

۱۸ـ (۱، ۲)، (۳، ۵)، (۳، ۴)

۲۰ـ (۱) لا = ۳ (۲) ما = ۷

(۳) لا = ما (۴) ۱۴لا + ۱۹ما − ۶۳ = ۰

(۵) ۹لا − ۱۰ما + ۱۵ = ۰ (۶) لا + ۱۳ما − ۴۶ = ۰

(۷) ۷لا + ۵ما − ۱۱ = ۰

۲۱ـ ۳ما = ۵لا ۲۲ـ ۲ما = ۳لا + ۱۵

۲۳ـ لا + ما = ۲، محور لا سے نقطہ (۲، ۰) پر اور محور ما سے نقطہ (۰، ۲) پر ملتا ہے۔

۲۴ـ اضلاع کی مساواتیں ۲لا − ما = ۰، لا − ۲ما = ۰، ۴لا + ۳ما = ۰

وسطی خطوط کی مساواتیں ۳لا + ما = ۰ [illegible]

۲۵ـ اضلاع کی مساواتیں ۲لا − ما = ۰، ما = ۴، ۲لا + ۳ما = ۰

وسطی خطوط کی مساواتیں ۲لا + ما = [illegible] ۱۶ = ۰،

۲لا + ۷ما − ۱۶ = ۰

امثلہ نمبری ۶ صفحہ ۱۱۹

۱ـ ۱۶ ½ سیر، ۲ [illegible] ۳ـ ۵ روپیہ ۱۰ آنہ، ۴۵

۴ـ ۶، ۳۶۴ روپیہ تقریباً ۵ـ ۱۱ بجکر ۴۴ منٹ، ۱۱۱۶ میل

۷ـ ۴۴ منٹ، ۶ میل

۸ـ ۹، ۱۲، ۱۵۱۶، ۱۷ فٹ اور ۱۲۵، ۳، ۳۵، ۴، ۱، ۵ سکنڈ

۹ـ ۹ بجکر ۴۳ منٹ ۱۷ سکنڈ، اس کے مقام روانگی سے ⅔۱۴ میل پر،

½ ۷ میل، ۸ بجکر ۴۳ منٹ پر تقریباً

۱۰- ۴ گھنٹے میں   ۱۱- ایک گھنٹہ کے بعد، مقام روانگی سے ۶ میل کے فاصلہ پر

۱۲- ۱۱ بجکر ۱۵ منٹ کے بعد، مقام روانگی سے $\frac{1}{4}$ ۱۱ میل پر

۱۳- ۱۰ بجکر ۳ منٹ ۴۵ سکنڈ، مقام روانگی سے تقریباً ۱۸ میل کے فاصلہ پر

۱۴- ۱۶ دفعہ ہر $\frac{1}{4}$ ۱۳ منٹ کے بعد، گزشتہ مقام ملاقات سے $\frac{2}{3}$ ۵۸۶ گز کے فاصلہ پر

۱۶- (۱) ۷ بجکر ۵٫۴۵ منٹ پر، ۷ بجکر ۳۲٫۷۲ منٹ اور ۳۴٫۳۶ منٹ کے بعد

۱۷- ۵٫۴۵ منٹ، ۱۰٫۹۰ منٹ، ۵۵ ر واں حصہ

۱۸- دوسری نالی کھولنے کے ۸٫۱ گھنٹہ اور ۲٫۱ گھنٹہ بعد بالترتیب

۱۹- ۲٫۱۹۱ گھنٹہ میں   ۲۰- ۵٫۰۸ دن

۲۱- ۹٫۱۵ دن میں   ۲۲- ۸۷٫۵ روپیہ

۲۳- ۹۶ روپیہ   ۲۴- نسبت ۲ : ۱ ہے

۲۵- ۸۷، ۵۵، ۴۸   ۲۶- ۱۳ پونڈ

۲۷- ۱۴٫۱، ۴٫۷۳ انچ اور ۳٫۶۳، ۳ کلوگرام

۲۸- ۶۶۹٫۳، ۸۸۷٫۱۱

۲۹- ۱۷۸٫۱۴ °ف، ۱۹٫۱۱ °س   ۳۲- ۲٫۵۵

۳۳- ا = ۱۴٫۳۱، ب = ۹۰٫۳ اور ز = ۲۰۰، و = ۲۱۵

۳۴- ا = ۳٫۰۲، ب = ۱٫۶۸۶ تقریباً

۳۵- ۸٫۴۴، ۲۹٫۶

۳۶— ق = ۵۵٫ا ب + ۴۵۲٫۱

۳۷— ۴٫۱۸۱ پونڈ

امثلہ نمبری ۷ صفحہ ۱۴۸

۷— آخری دو سالوں کے اوسط کی بنا پر ۳ سال کے بعد،
۱۲ سال کے بعد

۸— ا سال، ۳ سال کے اندر

۱۲— ۹٫۵۷ لاکھ، ۲۳٫۱۶ لاکھ، پہلا منحنی، ۱۹۳۱ میں، ۹٫۰ لاکھ

۱۴— (۱) انگلستان ۱۱٫۲۹۱، ۲۵٫۹۷۵، ۳۲٫۵۲۸، ۳۶٫۳۴۶
سکاٹلینڈ ۳٫۹۳، ۲۹٫۶۸، ۳۹٫۴۵۴، ۴۶٫۳۴
آئرلینڈ ۸٫۸۰، ۶۰٫۹۹، ۳۷٫۱۷۶، ۴۴٫۱۴

(۲) ۱۹۰۱ میں آبادیاں مساوی ہوں گی

(۳) ۱۹۲۳ میں آبادی ڈیوڑھی ہو جائے گی ۱۹۲۱ میں اور
دوچند ہو جائے گی ۱۹۳۹ میں

۱۵— ۱۳٫۵، ۲۶٫۲۵، ۳۳٫۹۲۵، ۳۹٫۷۵ روپیہ تقریباً
۴٫۲۷ انچ

۱۶— ۹ روپیہ ۹ آنہ ۶ پائی، ۱۲ روپیہ ۱۳ آنہ ۶ پائی
۱۶ روپیہ ۱۰ آنہ ۶ پائی
۳٫۰۲، ۶٫۳، ۶٫۵ پائنیٹ

۱۷— ۳۷ روپیہ ۸ آنہ، ۴۴ روپیہ ۱۳ آنہ ۴ پائی، ۵۲ روپیہ ۸ آنہ
۵۸ روپیہ ۵ آنہ ۴ پائی

۱۲٫۵، ۲۰٫۳ انچ لمبے

۱۸۔ ۲۲، ۳۶، ۴۰، ۵۶ روپیہ

۱۹۔ ۲٫۵۳، ۶٫۲۶، ۷٫۱۴ پونڈ

۲۰۔ ۴۹٫۵۷، ۴۴٫۲۷، ۳۸٫۶۵، ۲۸٫۶۵ سال

۲۱۔ ۱۷٫۸۲ ۲۲۔ ۱٫۵ اور ۶۱٫۳ تقریباً

۲۳۔ ۱۶۴، ۳٫۸۸۳ فٹ تقریباً ۲۴۔ ۲۹٫۹۸، ۲۹٫۹۳

۲۹٫۹۲

۲۵۔ ۴° سنٹی گریڈ پر حجم ۵ مکعب سنٹی میٹر اور ۲۰ مکعب انچ

حجم پر تپش ۱۴° سنٹی گریڈ

۲۷۔ ۱٫۶، ۹ مکعب فٹ، ۲٫۷ پونڈ

امثلہ نمبری ۸ صفحہ ۱۶۸

۱۔ ۱، ۲ ، ۲۔ −۲، ۱ ۳۔ ۰، −۳ ۴۔ −۲، −۵

۵۔ −اب ۶۔ ۲ا، −۲ج ۷۔ ۱/۲، −۳/۴

۸۔ ا+ب، −ب+ج ۹۔ ۳، ۳

۱۰۔ −۲(ا+ب)، ۳(ا−ب)

۱۱۔ ۰، −۴/۷ ۱۲۔ −۲، ۵ ۱۳۔ ۰، ۱/۳

۱۴۔ ۱، ۳ ۱۵۔ −۸، −۳ ۱۶۔ ۱، −۲

۱۷۔ −۱، ۶/۵ ۱۸۔ ب/۶، ۵/۳ ب

۱۹۔ لا = −۵، لا = −۲ ۲۰۔ لا = ۷، لا = ۳

۲۱۔ لا = −۶ یا +۱ ۲۲۔ لا = +۹ یا −۳

۲۳- لا = ۲ یا -۱ ۲۴- لا = ۲/۳، -۱

۲۵- لا = -۶، -۵ ۲۶- -۸، +۵

۲۷- لا = -۳/۲، -۵/۳ ۲۸- +۲، -۱

۲۹- ۱، ۱ ۳۰- لا = ۳، -۱/۳

۳۱- لا = -۵/۳، ۳/۵ ۳۲- لا = -۱۳، +۱۱

۳۳- لا = ۲، ۱/۲ ۳۴- لا = ۱، ۱

۳۵- لا = ۱۵، -۴ ۳۶- لا = ۵، -۳/۲

۳۷- لا = ۲ل، ۳ل ۳۸- لا = ۳، -۴/۳

امثلہ نمبری ۹ صفحہ ۱۸۲

۱- ۲، ۲/۳ ۲- ۱/۲، -۲/۳ ۳- ۱/۷، -۳

۴- ۲، ۱/۲ ۵- ۳، -۱/۳ ۶- ۴/۳، -۳/۴

۷- ۴، -۲ ۸- -۵، ۲ ۹- ۱۸، -۶

۱۰- ۹/۵، -۱/۲ ۱۱- -۳/۲، -۵/۷ ۱۲- ۱، -۴/۷

۱۳- -۱۵/۷، ۳/۲ ۱۴- ۱۱، ۲ ۱۵- (۱) ۱۱، ۹ ۱۵/۱۷
(۲) ۴، -۹/۴

۱۶- -۴، ۳ ۱۷- ۳، -۱/۲ ۱۸- ۳، -۷/۳

۱۹- ۳/۴، ۴ ۲۰- ۲٫۷، -۱٫۳ ۲۱- ۱٫۷، -٫۳

۲۲- ۵/۶، -۲/۵ ۲۳- ٫۴۱، -۲٫۴۱ ۲۴- ۳٫۴۱، ٫۵۸

۲۵- ۲٫۱۳، -۳٫۲۹ ۲۶- ۳٫۴۴، -۱٫۴۴

۲۷- -۳٫۷۳ یا -٫۲۷ ۲۸- -۳٫۳۸، ٫۸۸

۲۹ — ۶، ۴، −۳، −۳، ۷، ۱/۱ ۳۰ — ±۳، ±۱

۳۱ — ±۵، ±۲ ۳۲ — ±۶، ±۳

۳۳ — ±۳، ±۲ ۳۴ — ۳، ۲ ۳۵ — ±۴، ±$\frac{1}{4}$

۳۶ — ±ب، ±ج ۳۷ — ۱، باقی خیالی ۳۸ — ۱۰، باقی خیالی

۳۹ — −۳، $\frac{1}{2}$، ۱ ۴۰ — ۱، $\frac{1}{3}$، −۲ ۴۱ — ۰، −۵، باقی خیالی

۴۲ — −۵، ۲، باقی خیالی ۴۳ — −۲، ۴؛ ۹، ۲۴؛ ۷، −۴، ۲

۴۴ — ۰، $\frac{5}{4}$ ۴۵ — $\frac{7}{5}$، $\frac{1}{5}$

امثلہ نمبری ۱۰ صفحہ ۱۸۹

۱ — ۳۵، ۳۹ یا −۳۵، −۴۹ ۲ — ۱ ۳ — ۱۵، ۲۰، ۲۵ یا −۱۵، −۲۰، −۲۵

۴ — ۹، ۱۲ ۵ — ۲√ ۶ — ۲۱، ۲۸ ۷ — ۶، ۳۰

۸ — ۱۸، ۱۹ یا −۱۸، −۱۹ اور ۱۴، ۱۵ یا −۱۴، −۱۵ ۹ — ۱۲، ۱۳ یا −۱۳، −۱۲

۱۰ — ۲۳، ۲۴ یا −۲۴، −۲۳ ۱۱ — ۱۲، ۱۳ یا −۱۳، −۱۲ ۱۲ — ۶، ۷ یا −۷، −۶

۱۳ — ۷، ۹، ۱۱ یا −۱۱، −۹، −۷ ۱۴ — ۳۶، −۲۵ ۱۵ — ۲۳، −۲۶

۱۶ — ۱۱، ۸ یا −۸، −۱۱ ۱۷ — ۱۲، ۱۳ ۱۸ — ۲۰، ۲۵

۱۹ — ۲۰، ۲۵ یا −۲۵، −۲۰ ۲۰ — ۲۶ سال ۲۱ — ۲۵ میل فی گھنٹہ

۲۲ — ۶ میل فی گھنٹہ ۲۳ — $\frac{1}{2}$ ۲۷ میل فی گھنٹہ

۲۴ — $\frac{2}{3}$ ۶ میل فی گھنٹہ ۲۵ — ۶۰ ۲۶ — ۸۰، ۲۰

۲۷ — ۱۵۰ ۲۸ — ۳ ۲۹ — ۱۵، ۱۰، ۶

۳۰ — ۵۰، ۴۰ ۳۱ — ۱۹۰، ۲۶۰

۳۲ — ۲۰۰، ۴ اور ۱۰۰، ۸ ۳۳ — ۱۳۱، ۲۱ فٹ تقریباً

۳۴ — ۵ انچ اور ۶ انچ

۳۵۔ ۲ گھنٹے   ۳۶۔ اب ۱۲ آنہ فی درجن

۳۷۔ ۵ روپیہ فی گیند   ۳۸۔ اج = ۱۳، ب ج = ۳

۳۹۔ ۱۲٫۳   ۴۰۔ $\frac{-۱ \pm ۱٫۱\sqrt{۵}}{۲}$

امثلہ نمبری ۱۱ صفحہ ۲۱۸

۲۔ لا = ما   ۴۔ −۲، ۱   ۵۔ ۲، −۵

۶۔ ٫۹۵، ۵٫۳   ۷۔ ۱٫۷۹، −۲٫۷۹

۸۔ −۴٫۶۵، ۲٫۱۵   ۹۔ ۲٫۴۹، −۱٫۱۶

۱۰۔ ۵، −۴٫۳   ۱۱۔ −۴، ۱٫۵

۱۲۔ −۳٫۲۲، ۱٫۵۵   ۱۳۔ ۲٫۴۱، −۱٫۴۱، −۲

۱۴۔ (۱) $\frac{۱}{۱۶}$ (۲) ۱$\frac{۱۱}{۱۲}$ (۳) $\frac{۷}{۸}$

۱۵۔ (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶

۱۷۔ (۱) لا = ۸، ما = ۶ یا لا = ۶، ما = ۸

(۲) ۵٫۲۲، −۲٫۹۵ اور −۱٫۴، ۵٫۸

(۳) ۳، ۵ یا ۵٫۸، −٫۶



تمت

فہرستِ اصطلاحات

Abscissa	فصلہ
Absolute term	رقم مطلق
Broken(graph)	شکستہ (ترسیم)
Continuous(graph)	مسلسل (ترسیم)
Coordinate	محدد
Dependent(variable)	تابع (متغیر)
Function	تفاعل
Graph	ترسیم
Independent(variable)	متبوع (متغیر)
Linear	خطی
Ordinate	معیّن
Plotting	نشان دہی کرنا، مرتسم کرنا
Quadratic equation	مساوات درجہ دوم
Ready reckoner	حاضر شمار
Reduction graphs	تحویلی ترسیمیں
Variable	متغیّر
Vector	سمتی

غلط نامہ

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۸	۱۶	دے	دئے
۴۰	۱۲	۲	۱
۹۲	۱۹	ما ہم	(ماہر)
۹۶	۱۸	۵	۳
۱۰۱	۱۱	فیصلہ	فصلہ
۱۱۵	۱۹	۱۰-۸	۱۰۸
۱۲۵	۱۱	انچ	انچ
۱۲۵	۲۰	تخویل	تحویل
۱۲۹	۸	قریب	قریب
۱۲۹	۲۰	طبعی	طبیعی
۱۳۶	۳	ابادی	آبادی
۱۳۶	۴	کھینچے	کھینچیے

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۴۰	۲	میعوں	معینوں
۱۵۵	۱۲	وٹی کرالماںک	وٹی کرالمانک
〃	۱۵	۹۶، ۹۵	۹۶، ۵۴
۱۵۰	۷	جدول دی	جدول میں دی
۱۶۱	۲۱	صورت	صورت ہے
۱۶۲	۷	لا = ÷ =	لا = ÷ = ۰
〃	۱۳	پا	یا
۱۷۰	۵	لا ±	لا² ±
۱۸۳	۱	=	=۰
۱۹۱	۱۶	سکا	سکے
۱۹۳	۱۰	تناطر	متناظر
۱۹۶	۴	ے	ے -